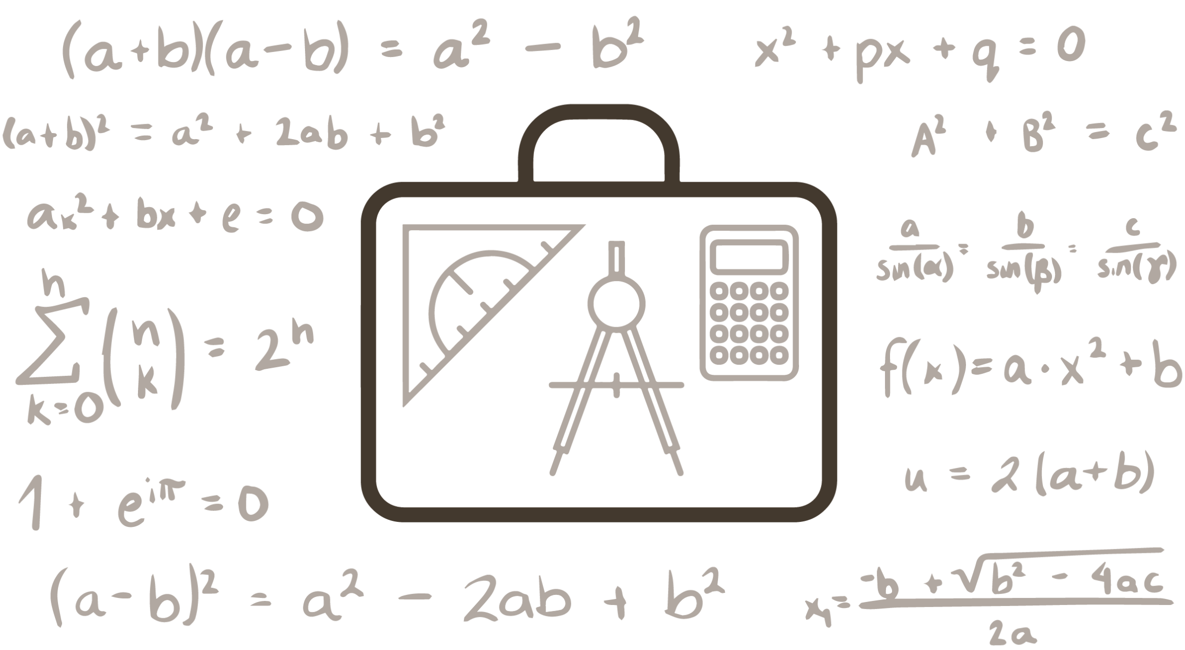
Lösungsheft der Hochschule RheinMain

Ergebnisse und Lösungshinweise zum
Mindestanforderungskatalog Mathematik



Version 1.0, Stand 27. Oktober 2025

Redaktion:
Projektgruppe Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen für Angewandte Wissenschaften des Landes Hessen

- Prof. Dr. Martin Bokler (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Peter Dannenmann (Hochschule RheinMain)
- Prof. Dr. Egbert Falkenberg (Frankfurt University of Applied Sciences)
- Raina Jockers, M.Sc. (Frankfurt University of Applied Sciences)
- Dr. Inna Mikhailova (Hochschule Darmstadt)
- Prof. Dr. Agnes Radl (Hochschule Fulda)

Gestaltung und Layout:

- Satz: Florian Hemmann, M.Sc., Dipl.-Math. Boris Sagromski sowie das oben genannte Redaktionsteam
- Titelbild: Michele Bonelli
- Grafiken: Magdalena Cardwell, B.A. (Aufgabe 69, 73, 74), cosh (Aufgabe 20), Prof. Dr. Peter Dannenmann (Aufgaben 23, 70, 79), Florian Hemmann, M.Sc. (Aufgabe 106, 109), Dr. Inna Mikhailova (Aufgabe 71), Prof. Dr. Agnes Radl (Aufgabe 82, 90), Dipl.-Math. Boris Sagromski (Aufgabe 76), Nele Teresa Waters (Aufgabe 7, 72)
- Vorlagen zum Katalog: Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschule RheinMain (Hessen), Mindestanforderungskatalog Mathematik der Gruppe „Kooperation Schule – Hochschule in Baden-Württemberg" (cosh)

Schlussredaktion:

- Prof. Dr. Benedikt Model (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Martin Bokler (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Peter Dannenmann (Hochschule RheinMain)

Weitere Unterstützung:

- OStRin Kerstin Blecker (Theodor-Heuss-Schule Wetzlar)
- StR Dr. Bastian Knippschild (Kultusministerium Hessen)
- OStRin Claudia Schlicker (Limesschule Idstein und Lehrkräftekademie)
- OStRin Andrea Wellan-Ely (Friedrich-List-Schule Wiesbaden)

Vorwort

Initiiert von den Vizepräsident*innen „Studium und Lehre“ der hessischen Hochschulen für Angewandte Wissenschaften (HAW) wurde zu Beginn des Jahres 2022 eine Projektgruppe mit dem Ziel der Entwicklung eines „Mindestanforderungkatalogs Mathematik“ gebildet. In der Projektgruppe haben pro HAW ein bis zwei Mathematik-Lehrende mitgearbeitet.

An allen HAWen in Hessen zeigen sich bei Studienanfänger*innen im Bereich der Mathematik Probleme beim Übergang von der Schule zur Hochschule. Bei ihnen offenbart sich eine Lücke zwischen den Anforderungen in der Mathematik an den HAWen und den in der Schule vermittelten Mathematikkompetenzen.

Um diese Lücke aufzuzeigen und zu dokumentieren, wurde zu Beginn des Wintersemesters 2022/23 durch das Projektteam ein Test mit Studienanfänger*innen aller hessischen HAWen durchgeführt. Der Test umfasste grundlegende mathematische Fähigkeiten wie z. B. Termumformungen und das Lösen einfacher Gleichungen. Der Test bestätigte die Praxiserfahrungen der Lehrenden und zeigte die Notwendigkeit auf, die Lücke zwischen den Anforderungen der HAWen an die mathematischen Vorkenntnisse der Studienanfänger*innen und deren tatsächlichen Vorkenntnissen zu schließen.

Der vorliegende Mindestanforderungskatalog zeigt die Kompetenzen im Bereich der Mathematik, die bei einem Start eines Studiums an einer HAW erwartet werden. Sowohl Studienanfänger*innen und Studieninteressierten als auch Schulen und Lehrer*innen wird damit eine Orientierung für den Studienstart an einer HAW gegeben. An allen hessischen HAWen gibt es vielfältige Maßnahmen und Zusatzangebote für Studienanfänger*innen zur Erleichterung des Studienstarts im Bereich der Mathematik. Eine nachhaltige Schließung der Lücke zwischen den Anforderungen in der Mathematik an den HAWen und den in der Schule vermittelten Mathematikkompetenzen ist aber nur in Kooperation mit Schulen, Hochschulen und zuständigen Ministerien möglich. Ein von allen hessischen HAWen gemeinsam getragener Mindestanforderungskatalog hilft, in Diskussionen mit Schulen und den zuständigen Ministerien Möglichkeiten zur Überbrückung und Schließung der Lücke zu finden. Basis für den vorliegenden Katalog ist ein Dokument, das an der Hochschule RheinMain gemeinsam mit Partnerschulen entwickelt wurde und auf der Grundlage des damaligen *Mindestanforderungskatalogs Mathematik – der Hochschulen Baden-Württembergs – für ein Studium von WIMINT-Fächern* (im Folgenden ‚cosh-Katalog‘ genannt) mathematische Mindestanforderungen für ein WIMINT-Studium aufzeigt. Die geforderten mathematischen Kompetenzen werden durch passende Beispielaufgaben verdeutlicht. Einige dieser Beispielaufgaben sind dem aktuellen cosh-Katalog [cosh] entnommen und teilweise verändert worden. Diese Aufgaben sind explizit als Aufgaben des cosh-Katalogs gekennzeichnet. Die geforderten Kompetenzen unterscheiden sich teilweise zwischen den Studienrichtungen. Sie werden mit folgenden Icons gekennzeichnet:

- Wirtschaftswissenschaften
- Ingenieurwissenschaften
- Informatik
- Bauingenieurwesen

Einige in diesem Katalog genannte Anforderungen gehen über die in den Kerncurricula der Sekundarstufen I und II in Hessen als verpflichtend aufgelisteten Inhalte hinaus. Da jedoch auch sie die mathematische Grundlage für verschiedene Module in den jeweiligen Studienrichtungen bilden, sind sie im vorliegenden Katalog aufgeführt. Sie sind mit Sternen gekennzeichnet:

* Kompetenz wird in der Fachoberschule (FOS) nur fakultativ vermittelt.

** Kompetenz wird an der FOS nicht vermittelt.

*** Kompetenz wird weder an der FOS noch an gymnasialer Oberstufe verpflichtend vermittelt.

Zur mathematischen Basiskompetenz gehört auch die Fähigkeit, Rechnungen und Termumformungen im Kopf durchzuführen. Daher wird man in einzelnen Aufgaben explizit aufgefordert, keinen Taschenrechner zu verwenden. Steht dazu nichts im Aufgabentext, ist die Zuhilfenahme eines Taschenrechners erlaubt.

Vorwort zum Lösungsheft

Liebe Studieninteressierte,

indem Sie eigenständig die Mathematikaufgaben zu den Kompetenzbereichen lösen, bereiten Sie sich aktiv auf die mathematischen Anforderungen Ihres Studiums vor. Dieses Lösungsheft soll Ihnen dabei helfen, Lösungsansätze zu finden, mit denen Sie weiterrechnen können und Ihre Ergebnisse zu überprüfen.

Es werden in der Regel die wesentlichen Lösungsschritte aufgezeigt. Wenn Ihnen einzelne Themenbereiche neu oder herausfordernd erscheinen und Ihnen die Lösungen nicht ausreichen, empfehlen wir ergänzende Literatur oder Online-Kurse zur Auffrischung der Grundlagen.

Wir empfehlen außerdem den Besuch eines Mathematik-Vorbereitungskurses vor Studienbeginn. Weitere Unterstützungsmaßnahmen zum Mathematiklernen an der Hochschule RheinMain finden Sie unter `www.hs-rm.de/mathe-unterstuetzung`

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg beim Lernen und einen guten Start ins Studium.
Herzliche Grüße

Florian Hemmann und Boris Sagromski
aus dem Team Didaktik und Digitale Lehre

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine mathematische Kompetenzen

Allgemeine mathematische Kompetenzen sind Fähigkeiten und Fertigkeiten, die Studienanfänger*innen unabhängig vom konkreten Themengebiet beim mathematischen Arbeiten einsetzen. Dazu zählen:

- Probleme lösen (Kapitel 1.1, Aufgaben 1-6)
- systematisch vorgehen (Kapitel 1.2, Aufgaben 7-10)
- Plausibilitätsüberlegungen anstellen (Kapitel 1.3, Aufgaben 11-16)
- mathematisch kommunizieren und argumentieren (Kapitel 1.4, Aufgaben 17-24)

Jeder dieser vier Bereiche beinhaltet weitere Aspekte, die selten trennscharf eingesetzt werden. Somit sind sie für jede Studienrichtung unabdingbar relevant.

1.1 Probleme lösen

1.1.1 Fragen stellen

(1) Im Jahr 2019 hatte Deutschland 42,13 Millionen weibliche und 41,04 Millionen männliche Einwohner*innen. In Hessen lebten 6,29 Millionen Menschen, davon waren 50,62 % weiblich. Die Anzahl der Studierenden betrug in Deutschland 10,40 Millionen, in Hessen 1,04 Millionen und in Berlin 706.100.[1]

(a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können.

Sie könnten zum Beispiel Fragen über den Anteil an bestimmten Gruppen in Deutschland stellen oder über die Anzahl der Personen, die eine Gruppe umfasst.

Ergebnis:

Wie viel Prozent der Deutschen sind männlich?
Wieviel Prozent der Deutschen kommen aus Hessen?
Wie viele Personen aus Hessen sind weiblich?
Wie hoch ist der Anteil der Studierenden in Deutschland bzw. Hessen?

(b) Formulieren Sie eine Frage, für deren Beantwortung mindestens eine weitere Information notwendig ist.

Mögliche Fragen könnten die Bevölkerungszahlen anderer Bundesländer zum Vergleich hinzuziehen, die zeitliche Entwicklung von Einwohner:innenzahlen über mehrere Jahre darstellen oder die einzelnen Gruppen weiter unterteilen.

Ergebnis:

Wie viele Einwohner:innen umfassen die drei bevölkerungsreichsten Bundesländer?
Um wie viel Prozent hat sich die Bevölkerungszahl in Hessen in den letzten 10 Jahren verändert?
Wie viel Prozent der Studierenden stammen aus einem EU-Land?

1.1.2 Mathematisch modellieren

(2) Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt $20\,m/s$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten $10\,s$ nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf im Intervall von $0\,s$ bis $10\,s$ grafisch dar und geben Sie einen Funktionsterm an, der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.[2]

Welche Punkte sind bereits gegeben? Zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein.

Ergebnis:

Zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ beträgt die Geschwindigkeit $V = 20\,m/s$, der erste Punkt lautet $P(0|20)$. Zum Zeitpunkt $t = 10\,s$ beträgt die Geschwindigkeit $V = 0\,m/s$, der zweite Punkt lautet $Q(10|0)$. Da die Bewegung „gleichmäßig“ ist, können beide Punkte durch eine Gerade verbunden werden.

Stellen Sie die Gleichung einer linearen Funktion $f(t) = m \cdot t + b$ auf. Zur Berechnung der Steigung m nutzen Sie die gegebenen Punkte $P(0|20)$ und $Q(10|0)$.

$$m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} = \frac{-20}{10} = -2$$

b ist der Wert an der Stelle $t = 0$, das heißt $b = 20$.

Ergebnis: $f(t) = -2 \cdot t + 20$

Ergänzung:

Physikalisch gesehen wird hier die Formel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung $v(t) = a \cdot t + v_0$ hergeleitet. Dabei ist $v(t)$ die Geschwindigkeit zur Zeit t, a die Beschleunigung, t die Zeit und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit. Rechnet man mit den gegebenen Einheiten, so erhält man: $v(t) = -2\frac{m}{s^2} \cdot t + 20\frac{m}{s}$

1.1.3 Strategien des Problemlösens anwenden

(3) Ein Schwimmbecken mit dem Volumen $720\,m^3$ kann durch drei Leitungen mit Wasser gefüllt werden. Eine Messung ergab, dass die Füllung des Beckens mit den beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten dauert. Die Füllung mit der ersten und der dritten Leitung zusammen dauert eine Stunde, mit der zweiten und der dritten Leitung zusammen dauert es 1,5 Stunden.[3]

(a) Erläutern Sie zunächst, wieso das nachfolgende lineare Gleichungssystem *nicht* geeignet ist, um das Problem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\;\; &= \frac{3}{4} \\ x_1 \quad\;\; + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, welche Bedeutung x_1, x_2 und x_3 haben.

Ergebnis:

Die Zahlen $\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ geben Füllzeiten an. Somit können x_1, x_2 und x_3 auch nur für Zeiten stehen. Die Aufgabe fragt aber nach einer Durchflussrate in $\frac{m^3}{min}$.

(b) Wie großist die Wassermenge, die durch jede der drei Leitungen pro Minute ins Becken gepumpt werden kann?

Nutzen Sie die Formel

$$Flussrate = \frac{Volumen}{Zeit}$$

Für jede der drei Kombinationen erhalten Sie eine Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{720}{45} \\ x_1 + x_3 &= \frac{720}{60} \\ x_2 + x_3 &= \frac{720}{90} \end{aligned}$$

Sie können das Gleichungssystem jetzt mit dem Additions- oder Einsetzungsverfahren lösen.

Ergebnis: $x_1 = 10\frac{m^3}{min}; x_2 = 6\frac{m^3}{min}; x_3 = 2\frac{m^3}{min}$

(c) Wie lange benötigt man bei der Benutzung aller drei Leitungen, um das Becken zu füllen?

Teilen Sie das Gesamtvolumen $720m^3$ durch den Gesamtdurchfluss $x_1 + x_2 + x_3$.

Ergebnis: 40 Minuten

1.1.4 Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen

(4) Begründen Sie, dass jedes Viereck, das zugleich Raute und Rechteck ist, ein Quadrat sein muss.[4]

Welche geometrischen Eigenschaften haben eine Raute, ein Rechteck und ein Quadrat?

Ergebnis:

Ein Viereck, das zugleich Raute (alle Seiten gleich lang) und Rechteck (alle Innenwinkel 90°) ist, muss ein Quadrat sein, weil ein Quadrat genau diese Eigenschaften vereint.

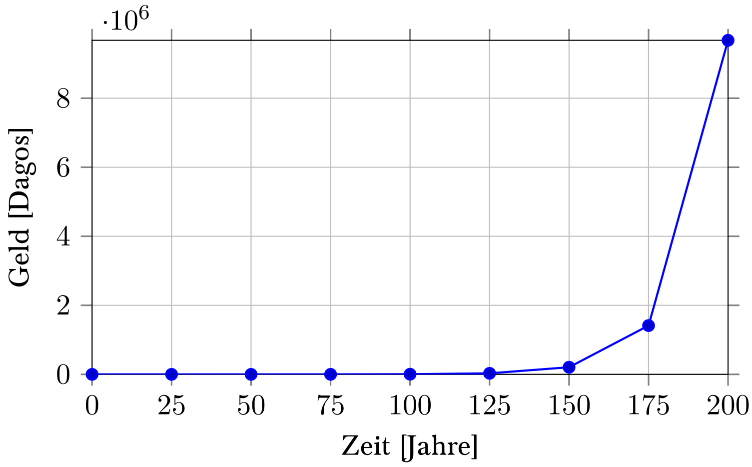
(5) Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos – das entspricht 0,3 € – bei einer Bank angelegt und jährlich mit 8 % fest verzinst.[5]

(a) Wie großwäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mit verzinst würden? Stellen Sie eine Wertetabelle auf und skizzieren Sie die Entwicklung des Guthabens in Abhängigkeit von der Zeit.

Verwenden Sie die Formel für den Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$. Dabei gilt: K_n = Endkapital, K_0 = Anfangskapital, p = Zinssatz und n = Laufzeit in Jahren. Im konkreten Fall sieht die Formel so aus: $K_n = 2 \cdot 1{,}08^n$.

Ergebnis: $K_{200} = 9\,677\,899$ Dagos

Zeit [Jahre]	Geld [Dagos]
0	2
25	13,70
50	93,80
75	642,41
100	4 399,52
125	30 130,02
150	206 344,70
175	1 413 146,56
200	9 677 899,17



(b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?

Durch gezieltes Probieren mit der Formel aus (a) erhält man die Lösung, dass die 2 Dagos nach 59 bis 60 Jahren auf 200 Dagos angewachsen wären.
Ein genaueres Ergebnis erhält man, wenn man die Formel aus (a) mithilfe des Logarithmus zur Basis 1,08 nach n auflöst.

$$\begin{aligned} 200 &= 2 \cdot 1{,}08^n && \mid :2 \\ 100 &= 1{,}08^n && \mid \log_{1,08}() \\ \log_{1,08}(100) &= n \\ 59{,}84 &= n \end{aligned}$$

Ergebnis: Nach 59,84 Jahren liegen 200 Dagos auf dem Konto.

(c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet 2.000.000 € beträgt?

Beachten Sie hier die geforderte Umrechnung in Euro. Es kann wieder mit der Formel aus (a) gearbeitet werden. Dabei ist p die Unbekannte.

$$\begin{aligned}
2\,000\,000 &= 0{,}3 \cdot (1 + \frac{p}{100})^{200} && \mid : 0{,}3 \\
\frac{2\,000\,000}{0{,}3} &= (1 + \frac{p}{100})^{200} && \mid \sqrt[200]{} \\
\sqrt[200]{\frac{2\,000\,000}{0{,}3}} &= 1 + \frac{p}{100} && \\
1{,}0817 &= 1 + \frac{p}{100} && \mid -1 \\
0{,}0817 &= \frac{p}{100} && \mid \cdot 100 \\
8{,}17 &= p
\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Zinssatz liegt bei $8{,}17\,\%$.

(6) Bestimmen Sie $\sin(17^\circ)$, $\cos(23^\circ)$, $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\tan(19^\circ)$, $\sin(0{,}5)$.*

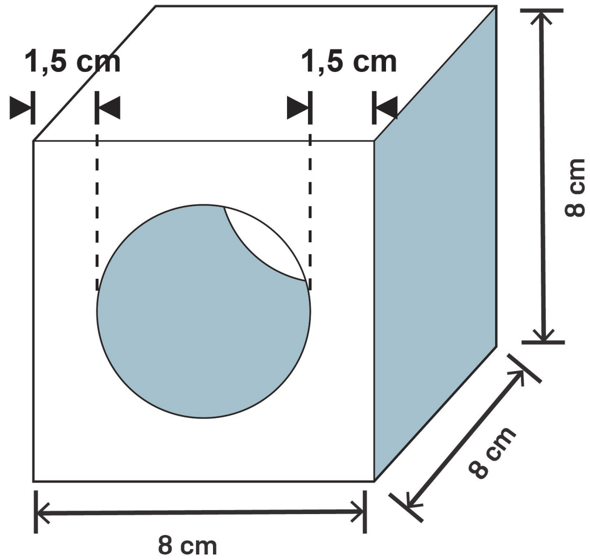
$\frac{\pi}{5}$ und $0{,}5$ sind Werte im Bogenmaß. Alle anderen Werte sind in Grad gegeben.

Ergebnis: $\sin(17^\circ) = 0{,}292$; $\cos(23^\circ) = 0{,}921$; $\cos(\frac{\pi}{5}) = 0{,}809$; $\tan(19^\circ) = 0{,}344$; $\sin(0{,}5) = 0{,}479$

1.2 Systematisch vorgehen

1.2.1 Zerlegen komplexer Sachverhalte in einfachere Probleme

(7) Ermitteln Sie aus den Angaben der folgenden Abbildung das Volumen des Körpers.



Berechnen Sie das Volumen des Würfels. Subtrahieren Sie anschließend das Volumen des Zylinders.

Ergebnis: $V = 354{,}92\ cm^3$

1.2.2 Fallunterscheidungen

(8) Gegeben ist die Funktion $f_s(x) = x^2 - 3x - s$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_s in Abhängigkeit von s.

Der Ansatz führt auf eine quadratische Gleichung. Diese lässt sich mithilfe der pq-Formel lösen: $x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + s}$
Je nach Wert unter der Wurzel (abhängig von s) existieren keine, eine oder zwei reelle Nullstellen.

Ergebnis:
Für s < -2,25 existiert keine reelle Nullstelle.
Für s = -2,25 existiert eine reelle Nullstelle.
Für s > -2,25 existieren zwei reelle Nullstellen.

(9) Gegeben ist die Gerade $g_k(x) = (k + 3) \cdot (x - 0{,}5)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Für welche Werte von k liegt er oberhalb, unterhalb oder direkt auf der x-Achse?

Die y-Achse wird bei $x_k = 0$ geschnitten. Für die Bestimmung des Schnittpunktes $S_k(x_k|y_k)$ in Abhängigkeit von k ergibt sich daraus der Ansatz:

$g_k(0) = y_k = (k + 3) \cdot (0 - 0{,}5) = -0{,}5k - 1{,}5$

Ergebnis:
$S_k(0|-0{,}5k-1{,}5)$
Für k < -3 liegt der Schnittpunkt der Geraden oberhalb der x-Achse.
Für k = -3 liegt der Schnittpunkt der Geraden auf der x-Achse.
Für k > -3 liegt der Schnittpunkt der Geraden unterhalb der x-Achse.

1.2.3 Sorgfältiges und gewissenhaftes Arbeiten

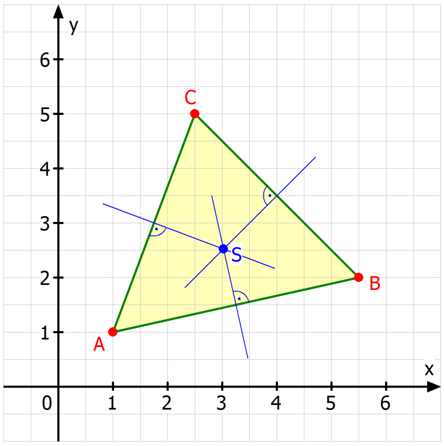
Siehe auch Aufgabe 104.

(10) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem ein Dreieck mit den Koordinaten der Eckpunkte $A(1|1)$, $B(5{,}5|2)$ und $C(2{,}5|5)$ ein.

(a) Konstruieren Sie die Mittelsenkrechten und ermitteln Sie deren Schnittpunkt aus der Zeichnung.

Die Mittelsenkrechten liegen jeweils in der Mitte einer Dreiecksseite und stehen senkrecht auf dieser. Sie treffen sich alle in einem Punkt.

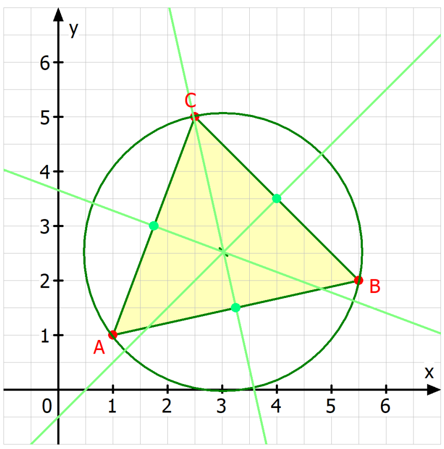
Ergebnis: $S(3|2{,}5)$



(b) Bestimmen Sie den Radius des Umkreises.

Der Umkreis hat seinen Mittelpunkt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und verläuft durch alle Eckpunkte des Dreiecks.

Ergebnis: $r \approx 2{,}53$



1.3 Plausibilitätsüberlegungen anstellen

1.3.1 Fehler identifizieren und erklären

(11) In einer Klassenarbeit zum Thema Gleichungen hat ein*e Schüler*in die folgenden Lösungen aufgeschrieben. Prüfen Sie die Lösungen, analysieren Sie die Lösungswege und erläutern Sie die Fehler, die gemacht wurden.

(a)

$$\begin{aligned} x^2 - 15 &= -6 && \mid +15 \\ x^2 &= 9 && \mid \sqrt{} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x - 23 &= -2 - x^2 && \mid + x^2 + 2 \\ x^2 + 4x - 21 &= 0 && \mid \text{Lösen mit p-q-Formel} \\ x_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 21} \end{aligned}$$

Keine reelle Lösung, da negative Zahl unter der Wurzel.

(c)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x &= 2x - 6 && \mid \text{ausklammern} \\ 2x(x-3) &= 2(x-3) && \mid : (x-3) \\ 2x &= 2 && \mid : 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

(a) Achten Sie auf die Wurzel.

Ergebnis:

Die Lösung ist nicht vollständig, da auch $-\sqrt{9} = -3$ eine Lösung für x ist.

(b) Achten Sie auf die Bildung der pq-Formel.

Ergebnis:

Unter der Wurzel muss $2^2 + 21$ stehen. Daraus folgt: $x_1 = -7$, $x_2 = 3$

(c) Achten Sie auf die zweite Umformung.

Ergebnis:

Es darf nur durch $x - 3$ geteilt werden, wenn $x \neq 3$. $x = 3$ ist aber eine zusätzliche Lösung der Gleichung. Wird die Gleichung gleich zu Beginn in die Normalform einer quadratischen Gleichung umgeformt ($x^2 - 4x + 3 = 0$), vermeidet man den Fehler, da sich beide Lösungen durch Anwenden der abc- oder pq-Formel berechnen lassen.

1.3.2 Größenordnungen abschätzen

(12) Im Jahr 2022 wurde in Hessen auf einer Fläche von $3589\,ha$ Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro Ar betrug $68{,}75\,l$ ($1\,ha$ entspricht $100\,Ar$). Schätzen Sie die Länge der Flaschenreihe für den Fall ab, dass man die gesamte Jahresproduktion in Dreiviertelliterflaschen abfüllt und diese Flaschen der Länge nach hintereinanderlegt.[6]

Ergebnis:

Runden Sie für die Schätzung. Rechnen Sie mit 3 600 ha und 70 Litern pro Ar. Dann ergibt sich eine Menge von rund 25 Mio Litern. Diese aufgeteilt auf 3/4-Liter-Flaschen ergeben rund 33,33 Mio Flaschen. Rechnet man mit etwa 1/3 Meter Länge pro Flasche, so ergibt sich eine Kette von rund 11,11 Mio Metern, also rund 11 110 km.(Eine genaue Rechnung ergibt eine Länge von $l = 10\,966{,}39\ km$.)

(13) Ordnen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners) die angegebenen Zahlen der Größe nach; beginnend mit der kleinsten:[7]

$$0;\ (0{,}5)^{-2{,}4};\ 1;\ 4;\ 4^{-3{,}8};\ 0{,}25;\ 2^{-3{,}3};\ (0{,}5)^{2{,}4};\ 8;\ 2^{-3}$$

Ergebnis:

Bis auf die Null lassen sich alle Zahlen als Potenzen von 2 ausdrücken. Nutzen Sie dafür die Potenzgesetze:

$x^{a\cdot b} = (x^a)^b$ und $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Anschließend lassen sich die Potenzen nach den Exponenten ordnen.

Ergebnis:

Reihenfolge	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Zahl	0	$4^{-3{,}8}$	$2^{-3{,}3}$	2^{-3}	$(0{,}5)^{2{,}4}$	0,25	1	4	$(0{,}5)^{-2{,}4}$	8
Zweierpotenz	-	$2^{-7{,}6}$	$2^{-3{,}3}$	2^{-3}	$2^{-2{,}4}$	2^{-2}	2^0	2^2	$2^{2{,}4}$	2^3

(14) Wenn man die Zahlen $a = (10^{10})^{10}$ und $b = 10^{(10^{10})}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Bestimmen Sie ohne Nutzung des Taschenrechners die Anzahl der Stellen der Zahlen a bzw. b.
Auf eine Normseite passen 1800 Zeichen. Ein Drucker benötigt 5 Sekunden, um eine Seite zu drucken. Wie lange braucht er etwa, um die ausgeschriebenen Zahlen a bzw. b zu drucken? Überschlagen Sie zuerst das Ergebnis und berechnen Sie es anschließend.[8]

$10^1 = 10;\ 10^2 = 100; \ldots$ bedeutet, dass die Anzahl der Nullen mit der Größe des Exponenten wächst. Allgemein hat die Zahl 10^n insgesamt n Nullen. Inklusive der 1 am Anfang ergeben sich $n+1$ Stellen bei der ausgeschriebenen Zahl.

Ergebnis:

a hat 101 Stellen, d.h. eine 1 am Beginn und 100 Nullen dahinter. b besteht aus 10.000.000.001 Stellen.

Schätzung:

Die Stellen von a entsprechen rund $\frac{1}{18}$ der 1 800 Zeichen. Grob gerechnet braucht der Drucker dafür $\frac{1}{3}$ Sekunde Druckzeit. Für b rechnet man mit 10 Mrd Stellen und rund 2 000 Zeichen pro Seite. Das heißt, für den Druck der dann 5 Mio Seiten benötigt der Drucker 25 Mio Sekunden. Das sind ungefähr 289 Tage,

Das genaue Ergebnis kann rechnerisch mit dem Dreisatz bestimmt werden. Das Drucken dauert für a rund 0,28 Sekunden und für b $(50\,000\,000\,005 \div 1\,800)$ Sekunden. Das sind rund 7.716,05 Stunden, also 321 Tage, 12 Stunden und 3 Minuten.

1.3.3 Mittels Überschlagsrechnung Ergebnisse kontrollieren

(15) Prüfen Sie ohne genaues Nachrechnen die nachfolgenden Aussagen mit Überschlagsbetrachtungen auf Plausibilität:

(a) $2{,}94 \cdot 1{,}98 = 6{,}01$

(b) $42 \cdot 58 = 243$

(c) $\dfrac{2^{10}}{10^6} = 1{,}048576$

(d) $\dfrac{23{,}55}{0{,}125} = 188{,}4$

(a) Runden Sie auf nahe liegende Zahlen.

Ergebnis:

Wird gerundet, ergibt sich: $3 \cdot 2 = 6$. Da die beiden Summanden jedoch unter 2 und 3 liegen, kann das Ergebnis nicht größer als 6 sein.

(b) Runden Sie auf nahe liegende Zahlen.

Ergebnis:

Gerundet ergibt sich: $40 \cdot 60 = 2400$. Das Ergebnis ist um den Faktor 10 zu klein.

(c) Schätzen Sie jeweils die Anzahl der Stellen von Zähler und Nenner.

Ergebnis:

Der Zähler ist niedrig 4-stellig. Der Zähler hat 7 Stellen. Das Ergebnis ist um den Faktor 1000 zu hoch.

(d) Schreiben Sie den Nenner als Bruch.

Ergebnis:

Man kann den Nenner auch als $\frac{1}{8}$ schreiben. Teilen durch $\frac{1}{8}$ bedeutet Multiplikation mit 8. Der Überschlag $25 \cdot 8 = 200$ zeigt, dass das Ergebnis plausibel ist.

(16) Zu Beginn jedes Jahres werden auf ein Sparbuch 1000 € eingezahlt.[9]

(a) Das Guthaben wird während der gesamten Zeit mit einem Zinssatz von 5 % pro Jahr verzinst und die Zinsen werden jeweils zum Jahresende dem Guthaben zugeschlagen. Überschlagen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 5. Jahres am nächsten kommt. Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das genaue Ergebnis zu berechnen.
1250 € 5000 € 5250 € 5800 € 6250 €

Nutzen Sie beispielsweise das Ausschluss-Verfahren: Welche Werte sind zu niedrig oder zu hoch um realistisch zu sein? Überlegen Sie dazu zunächst, wie viel 5% von 1000€ sind.

Ergebnis: 5800 €

(b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine exakte Rechnung.

Sie können dazu für jedes Jahr 5% des aktuellen Guthaben zu diesem addieren. Gehen Sie Schritt für Schritt vor. Sie können auch die Formel für den Zinseszins (siehe Aufgabe 5) verwenden.

Ergebnis: 5801,91 €

1.4 Mathematisch kommunizieren und argumentieren

1.4.1 Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden

(17) Legen Sie für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle an und zeichnen Sie die zugehörigen Graphen.

(a) $f(x) = 0{,}75 \cdot x$

(b) $f(x) = \frac{5}{x}$

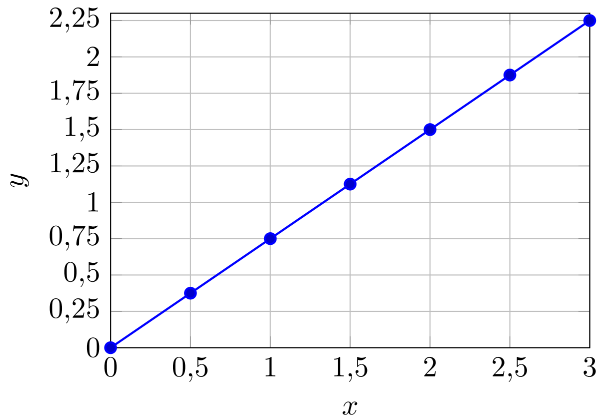
Geben Sie an, welche der Funktionen proportional ist, und begründen Sie Ihre Wahl.

Proportional bedeutet, dass zwei Größen immer im selben Verhältnis zueinander stehen.

Ergebnis:

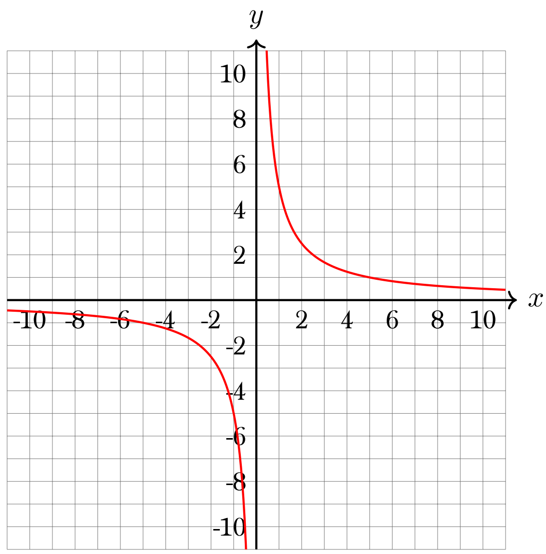
(a) Die Funktion ist proportional, da eine Verdopplung des x-Wertes eine Verdopplung des y-Wertes verursacht.

x	y
0	0
0,5	0,375
1	0,75
1,5	1,125
2	1,5
2,5	1,875
3	2,25



(b) Die Funktion ist nicht proportional, da eine Verdopplung des x-Wertes keine Verdopplung des y-Wertes verursacht.

x	y
1	5
2	2,5
3	1,67
4	1,25
5	1
6	0,83
7	0,714



(18) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:**

(a) $\sum_{i=1}^{9} i$

(b) $\sum_{i=-3}^{3} (i+3)$

(c) Gegeben sind die Werte $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_3 = 5$. Berechnen Sie $\prod_{i=1}^{3} x_i$. ***

(a) Summieren Sie die einzelnen Werte von $i = 1$ bis $i = 9$.

Ergebnis: 45

(b) Summieren Sie die einzelnen Werte von $i = -3$ bis $i = 3$ für den Term $i + 3$.

Ergebnis: 21

(c) Multiplizieren Sie die einzelnen Werte von $i = 1$ bis $i = 3$.

Ergebnis: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -5$

(19) Prüfen Sie die Gültigkeit der Gleichung $\frac{c}{\frac{b}{a}} = \frac{\frac{c}{b}}{a}$.

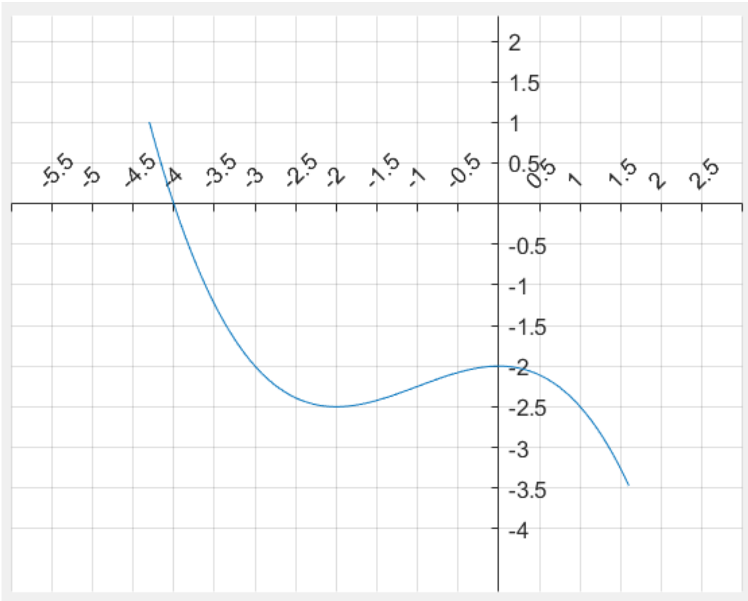
Sie können die Gleichung umformen und als Folge einige Parameter kürzen.

Ergebnis:

Nach Kürzen von b und c bleibt $a = \frac{1}{a}$ stehen. Das heißt, die Gleichung ist für $a = 1$ und $a = -1$ gültig.

1.4.2 Mathematische Sachverhalte mit Worten erklären

(20) Die Abbildung zeigt für $-6 \le x \le 3$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

(a) $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h.

Wie verhält sich die zweite Ableitung an der Stelle $x_1 = 0$?

Ergebnis:

Da bei $x_1 = 0$ die erste Ableitung einen relativen Hochpunkt hat, ist die zweite Ableitung der Funktion gleich Null und es findet ein Vorzeichenwechsel statt. Es handelt sich also um eine Wendestelle.

(b) $h''(-2) = 1$

Betrachten Sie den Graphen an der Stelle $h'(-2)$.

Ergebnis:

Stimmt nicht. h' besitzt bei $x = -2$ keine Steigung, deshalb muss die Ableitung von h' (also h'') an dieser Stelle Null sein.

(c) Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3{,}1]$ streng monoton fallend.

Streng monoton fallend bedeutet, dass die Ableitungsfunktion negativ ist.

Ergebnis:

Ja, denn h' ist in dem gegebenen Intervall stets unter Null.

(d) Der Graph von h hat an der Stelle $x_2 = -4$ einen Tiefpunkt.

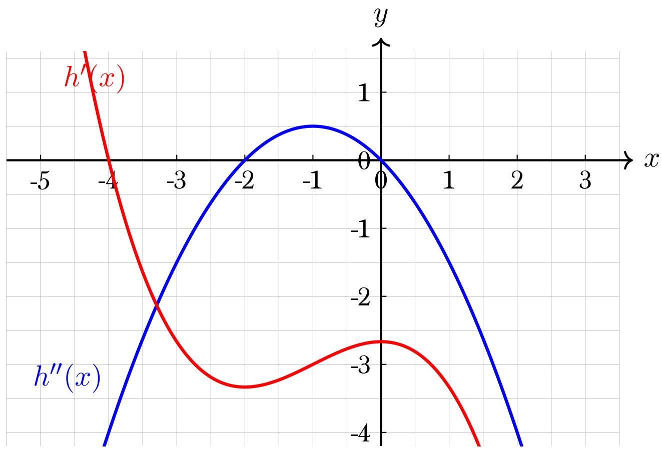
Es liegt auf jeden Fall eine Extremstelle von h vor, da $h'(-4) = 0$.

Ergebnis:

Nein, denn h' hat an der Stelle $x_2 = -4$ einen Vorzeichenwechsel von Plus zu Minus. h besitzt dort also einen Hochpunkt.

Skizzieren Sie den Graphen von h''.[10]
h'' gibt die Steigung von h' an.

Ergebnis:



(21) Formulieren Sie den Term $a \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + d}$ so in Worten, dass ein Zuhörer ihn fehlerfrei aufschreiben kann. [11]

Es gelten die Regeln: 1. Rechnen von innen nach außen (d.h. Terme unter Wurzeln und in Klammern werden zuerst gerechnet), 2. Punkt- vor Strichrechnung, 2. Rechnen von links nach rechts

Ergebnis:

b wird mit c^2 multipliziert. Dann wird d addiert. Der gesamte Term steht unter einer Wurzel. Zuletzt wird a mit dieser Wurzel multipliziert.

1.4.3 Mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen begründen oder widerlegen

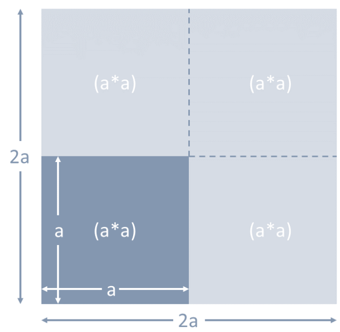
(22) Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt eines Quadrats vervierfacht, wenn man die Seitenlänge verdoppelt.

(a) anhand einer Skizze

(b) mithilfe einer Berechnung

(a) Zeichnen Sie ein Quadrat mit einer bestimmten Seitenlänge und darüber eins mit der doppelten Seitenlänge.

Ergebnis:



(b) Wählen Sie die Seitenlänge allgemein (z.B. als a) und rechnen Sie die Flächeninhalte bei einfacher und bei doppelter Seitenlänge aus.

Ergebnis: $F_a = a^2$; $F_{(2\cdot a)} = (2 \cdot a)^2 = 2^2 \cdot a^2 = 4a^2$

1.4.4 Zusammenhänge visualisieren

Siehe Aufgabe 5.

1.4.5 Graphische Darstellungen wie Funktionsgraphen oder Balkendiagramme interpretieren

Siehe auch Aufgaben 20, 106 und 109.

(23) Gegeben ist untenstehender Funktionsgraph:

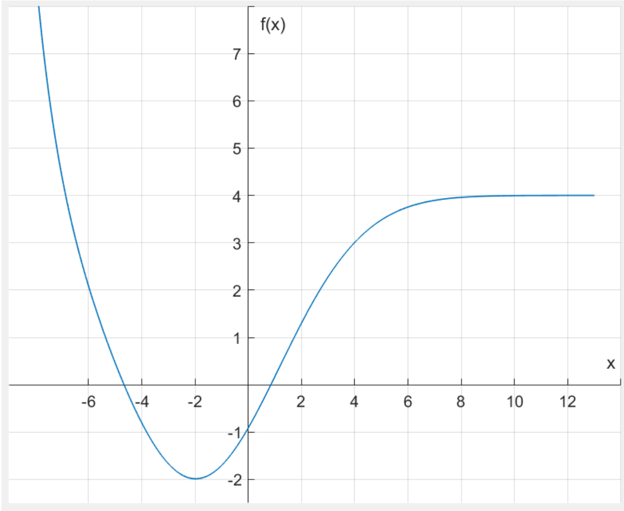
(a) Bestimmen Sie den Tiefpunkt des Graphen.

Ergebnis: T(-2l-2)

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x- und y-Achse.
An welchen Koordinaten schneidet der Graph die jeweilige Achse?

Ergebnis: $S_1(-4{,}75|0)$, $S_2(0|-0{,}9)$, $S_3(0{,}75|0)$

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion für $x \to \pm\infty$.



Wie entwickelt sich der Wert $f(x)$, wenn x gegen $-\infty$ $(bzw. +\infty)$ strebt?

Ergebnis:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$

1.4.6 Eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren

(24) Eine Person formuliert die Lösung einer Aufgabe in „Kurzschreibweise“:[12]

(a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.

(b) Welches geometrische Problem hatte die Person zu lösen?

(c) Interpretieren Sie das errechnete Ergebnis geometrisch.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 3x^2 - 12x - 5\\
&g(x) = -6x - 8\\
&f(x) = g(x):\\
&3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8\\
&\Leftrightarrow \dots\\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

(a) Sie können zunächst alle Terme auf eine Seite bringen und dann die Gleichung lösen.

Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 12x - 5 &= -6x - 8 && |+6x \quad |+8\\
3x^2 - 6x + 3 &= 0 && |:3\\
x^2 - 2x + 1 &= 0 && |\text{pq-Formel}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1}\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

(b) Stellen Sie sich f als Parabel und g als Gerade im Koordinatensystem vor. Was bedeutet $f(x) = g(x)$ dann?

Ergebnis:

Die Person sollte die Stelle x finden, an der sich die beiden Funktionen schneiden.

(c) Die einzige Lösung der Aufgabe ist $x = 1$.

Ergebnis:

In dem Punkt $(1|-14)$ berühren sich die Funktionen von f und g. Die Gerade g ist Tangente am Graphen von f.

2 Elementare Algebra

Elementare algebraische Umformungen sind das Handwerkszeug, das für die Erarbeitung mathematischer Inhalte im Studium erforderlich ist. Das beinhaltet im Einzelnen, dass Studienanfänger*innen über folgende Kompetenzen verfügen:

- Grundrechenarten: Zahlenräume $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ verstehen und einfache Rechnungen auf diesen ausführen (Kapitel 2.1, Aufgaben 25 - 30)
- Vorzeichen- und Klammerregeln beherrschen (Kapitel 2.1, Aufgaben 31 - 33)
- mit Beträgen rechnen (Kapitel 2.1, Aufgabe 34)
- sowohl mit Bruchzahlen als auch mit Bruchtermen rechnen (Kapitel 2.2, Aufgaben 35 - 39)
- proportionale Zusammenhänge verstehen und sie umsetzen sowie die Prozentrechnung beherrschen (Kapitel 2.3, Aufgaben 40 - 45)
- die Regeln von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen beherrschen (Kapitel 2.4, Aufgaben 46 - 55)
- einfache Gleichungen durch geeignete Verfahren lösen (Kapitel 2.5, Aufgaben 56 - 59, 61, 62)

Speziell für Studienanfänger*innen in den Studienbereichen

- Informatik und Ingenieurwissenschaften: einfache Exponentialgleichungen lösen (Kapitel 2.5, Aufgabe 60)
- Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften: Ungleichungen mit einer Unbekannten lösen (Kapitel 2.6, Aufgabe 63)

Wir setzen voraus, dass abgesehen von der Bestimmung eines numerischen Endergebnisses diese Aufgaben ohne Taschenrechner gelöst werden.

2.1 Grundrechenarten

,,,

2.1.1 Grundverständnis der Zahlenräume $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

(25) Ordnen Sie die folgenden Zahlen in die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen ein:

(a) -5 (b) $13{,}7$ (c) $\frac{7}{20}$ (d) $\frac{37}{32}$ (e) 87 (f) $\sqrt{2}$ (g) $\frac{36}{18}$ (h) π

Schauen Sie sich den Aufbau der Zahlenmengen genau an.

(a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{Q}$ (e) $\mathbb{N}$ (f) $\mathbb{R}$ (g) $\mathbb{Q}$ (h) $\mathbb{R}$

(26) Wandeln Sie ohne Nutzung des Taschenrechners die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um:

(a) $0{,}9$ (b) $-0{,}99$ (c) $90{,}0$ (d) $-9{,}01$

(a) $\frac{9}{10}$ (b) $-\frac{99}{100}$ (c) $\frac{90}{1}$ (d) $-\frac{901}{100}$

(27) Stellen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Brüche als (eventuell periodische) Dezimalzahlen dar:

(a) $\frac{24}{4}$ (b) $-\frac{25}{3}$ (c) $\frac{3{,}142}{100}$ (d) $-\frac{42}{1000}$

(a) Rechnen Sie 24 geteilt durch 4.
Ergebnis: 6

(b) Welche Zahl lässt sich durch 3 dividieren? Der Rest der Division lässt die Zahl periodisch werden.
Ergebnis: $-8,\overline{3}$

(c) $\frac{3}{100} = 0{,}03$. Die weiteren Ziffern schließen sich an.
Ergebnis: 0,03142

(d) $\frac{40}{1000} = 0{,}04$. Die weiteren Ziffern schließen sich an.
Ergebnis: $-0{,}042$

(28) Begründen Sie ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.[13]

Dafür muss der Ausdruck in der Klammer zwischen 2 und 3 liegen. Wandeln Sie diese Zahlen (2 und 3) in Brüche mit dem Nenner 41 um.

Ergebnis:

Es folgt: $2^2 = \left(\frac{82}{41}\right)^2 \leq \left(\frac{99}{41}\right)^2 \leq \left(\frac{123}{41}\right)^2 = 3^2$

(29) Ermitteln Sie ohne Verwendung des Taschenrechners, zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\sqrt{150}$ liegt.[14]
Sie müssen zwei aufeinanderfolgende Zahlen finden, die quadriert zunächst einen Wert unter und dann einen Wert über 150 ergeben. Fangen Sie beispielsweise bei Zahlen an, die Sie leicht quadrieren können und tasten Sie sich an die 150 heran.

Ergebnis:

$12^2 = 144 < 150$ und $13^2 = 169 > 150$ Die Zahl liegt somit zwischen 12 und 13

(30) Vereinfachen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners:

(a) $0{,}005 \cdot 100$ (b) $\frac{78653}{10^4}$

(a) Sie können bei der Multiplikation das Komma des einen Faktors um die gleiche Anzahl an Stellen nach links verschieben, wie Sie das Komma des anderen Faktors nach rechts verschieben.

Ergebnis: $0{,}005 \cdot 100 = 0{,}5$

(b) Bei Brüchen können Sie die Kommas im Zähler und im Nenner um gleich viele Stellen verschieben.

Ergebnis: $\frac{78653}{10^4} = 7{,}8653$

2.1.2 Vorzeichenregeln, Klammerregeln, Ausmultiplizieren, Ausklammern

(31) Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $a - (b - 2a) - (3a + 4b)$

(b) $3(x + 5) + (3 - x) \cdot 2$

(c) $(s^2 + q)(4 \cdot q^2)$

(d) $((m - 2n) - (m + 2n)) - ((n + 2m) - (n - 2m))$

(a) Ein Minus vor einer Klammer vor beide Ausdrücke in der Klammer gezogen werden.
Ergebnis: $-5b$

(b) Sie können zunächst die Faktoren in die Klammern ziehen.
Ergebnis: $x + 21$

(c) Sie können die beiden Klammern miteinander multiplizieren, indem Sie jeden Ausdruck der ersten Klammer mit $4q^2$ multiplizieren.
Ergebnis: $4q^2s^2 + 4q^3$

(d) Ein Minus vor einer Klammer kann vor beide Ausdrücke in der Klammer gezogen werden.
Ergebnis: $-4(n + m) = -4n - 4m$

(32) Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:
Achten Sie auf die Rechenreihenfolge (Punkt vor Strich usw.).

(a) $(3^4 - (12 - 6)^2 - 3) \cdot (8 - 3)$

(b) $((3^4 - 12) - 6^2) - (3 \cdot 8 - 3)$

(c) $(3^4 - 12 - (6^2 - 3) \cdot (8 - 3))$

(d) $3^4 - (12 - 6^2 - 3 \cdot (8 - 3))$

(a) 210

(b) 12

(c) -96

(d) 120

(33) Klammern Sie aus:
Welcher Term (welche Zahl, Variable) kommt mehrfach vor?
Diesen Teil können Sie ausklammern.

(a) $3a^2b + 9ab^2$

(b) $(4a - 2b)(x + y) - (3a + 4b)(x + y)$

(c) $(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y$

(d) $(15xy + 12bx)(a - c) - (5bx + 10xy)(a - c)$

Ergebnis:

(a) $3ab(a + 3b)$

(b) $(a - 6b)(x + y)$

(c) $(a - b)(x + y)$

(d) $x(a - c)(5y + 7b)$

2.1.3 Mit Beträgen rechnen

(34) Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:
Bilden Sie jeweils den Betrag der Zahl, die innerhalb der Betragsstriche steht. Falls es mehrere Betragsstriche gibt: arbeiten Sie sich von innen nach außen vor.

(a) $|5-7|$

(b) $|5-|5+5||$

(c) $(-3)+|-8|\cdot 2+|7-11|$

(d) $|5|-|(-6)|+|8-|-8||$

Ergebnis:

(a) 2

(b) 5

(c) 17

(d) -1

2.2 Bruchrechnung

2.2.1 Primfaktorzerlegung**

(35) Betrachten Sie die Zahlen 300 und 210.

(a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen dieser Zahlen.
Durch welche Primzahlen lassen sich die beiden Ausgangszahlen teilen?
Ergebnis: $300 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2;\;\; 210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

(b) Bestimmen Sie den ggT (größten gemeinsamen Teiler) und das kgV (kleinste gemeinsame Vielfache) dieser beiden Zahlen.
Der ggT ergibt sich als Produkt der gemeinsamen Primfaktoren von beiden Ausgangzahlen.
Außerdem gilt: $kgV(300,210) = \dfrac{(300\cdot 210)}{ggT(300,210)}$
Ergebnis:
$ggT(300,210) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$; $kgV(300,210) = 2100$

2.2.2 Rechnen mit Bruchzahlen

(36) Arbeiten Sie ohne Taschenrechner. Vereinfachen Sie die Brüche so weit wie möglich.

(a) $\dfrac{3}{6}$ (b) $\dfrac{20}{15}$ (c) $\dfrac{28}{7}$ (d) $\dfrac{52}{429}$

Suchen Sie nach einem gemeinsamen Teiler.
Ergebnis:

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{4}{3}$ (c) 4 (d) $\dfrac{4}{33}$

(37) Berechnen Sie ohne Taschenrechner und kürzen Sie so weit wie möglich:

(a) $\frac{10}{21} \cdot \frac{42}{55}$ (b) $\frac{17}{28} : \frac{102}{35}$ (c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ (d) $\frac{6}{7} - \frac{7}{9}$

(a) Sie zunächst, ob sich jeweils die diagonal zueinander liegenden Zahlen miteinander kürzen lassen.

Ergebnis: $\frac{4}{11}$

(b) Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Ergebnis: $\frac{5}{24}$

(c) Bilden Sie zunächst einen gemeinsamen Nenner.

Ergebnis: $\frac{19}{20}$

(d) Bilden Sie zunächst einen gemeinsamen Nenner.

Ergebnis: $\frac{5}{63}$

2.2.3 Rechnen mit Bruchtermen**

(38) Bringen Sie $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-3}$ auf den Hauptnenner.[15]

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der einzelnen Brüche.

Ergebnis:

$$\frac{a(x-2)(x-3) + b(x-3) + c(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)}$$

(39) Vereinfachen Sie die folgenden Brüche:[16]

(a) $\frac{45x - 20}{36x^2 - 16x}$ (b) $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$ (c) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$

(a) Klammern Sie zunächst so viel wie möglich aus $\frac{5 \cdot (9x-4)}{4x \cdot (9x-4)}$ und kürzen Sie dann. Ergebnis: $\frac{5}{4x}$

(b) Bringen Sie die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner $\frac{a(a+b) - b(a-b)}{ab}$ und multiplizieren Sie aus.

Ergebnis: $\frac{a^2 + b^2}{ab}$

(c) Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert. Die Potenzen müssen in die Klammern gezogen werden. $\left(\frac{a^6 \cdot b^3}{c^3 \cdot d^9} \cdot \frac{c^8 \cdot d^8}{a^4 \cdot b^8}\right)$

Ergebnis: $\frac{a^2 c^5}{b^5 d}$

2.3 Proportionalitäten, Prozentrechnung und Dreisatz

2.3.1 Proportionalitäten, Dreisatz

(40) Lösen Sie folgende Textaufgaben:[17]

(a) Ein Pkw verbraucht auf $100\,km$ $9{,}6\,l$ Benzin. Berechnen Sie, welche Strecke er mit einer Tankfüllung von $60\,l$ zurücklegen kann.

(b) Von 5 Maurer*innen werden $616\,m^2$ Mauerwerk in $154\,h$ hergestellt. Berechnen Sie die Fläche des Mauerwerks, die bei gleicher Leistung durch 6 Maurer*innen in $160\,h$ herstellt werden kann.

(c) Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel (der Einfachheit halber 6 Millionen Pixel) und produziert Bilder im Kleinformat 3 : 2. Berechnen Sie die Größe eines quadratischen Pixels auf einem Ausdruck im Format $60\,cm \times 40\,cm$.

(a) Sie können eine Gleichung aufstellen, in der auf beiden Seiten Werte mit der Einheit $\frac{km}{l}$ stehen.

Ergebnis:

$$\frac{100\ km}{9{,}6\ l} = \frac{x\ km}{60\ l} \Rightarrow x = 625$$

(b) Berechnen Sie zunächst die Leistung der 5 Maurer:innen in $\frac{m^2}{h}$ ($\frac{616\ m^2}{154\ h} = 4\frac{m^2}{\mathrm{h}}$). Berechnen Sie dann mit Hilfe des Dreisatzes die Leistung der 6 Maurer:innen und rechnen Sie auf die $160\ h$ um.

Ergebnis: $A = 768\ m^2$

(c) Rechnen Sie die Fläche auf einen Pixel herunter.

Ergebnis: $A = 4 \cdot 10^{-4}\ cm^2 = 0{,}04\ mm^2$

2.3.2 Prozentangaben, Zins- und Zinseszinsrechnung

(41) Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2020 um $10\,\%$ und wächst in den Jahren 2021 und 2022 um je $5\,\%$. Vergleichen Sie den Kurs Ende 2022 mit dem Kurs zum Beginn von 2020. Berechnen Sie die prozentuale Kursänderung.[18]

Sie können für den Anfangswert eine Variable (z.B. a) definieren, auf welche Sie Schritt für Schritt die Veränderung anwenden.

Ergebnis: Die Aktie hat noch 99,225 % ihres Wertes, sie fällt also um 0,775 %.

(42) Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Berechnen Sie den zugehörigen Mittelpunktswinkel.[19]

Der prozentuale Anteil der Fläche entspricht dem prozentualen Anteil des Winkels.

Ergebnis: Der Mittelpunktswinkel beträgt $108°$.

(43) Um welchen Faktor verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?[20]

Der Flächeninhalt eines Dreiecks kann über die Katheten a und b folgendermaßen berechnet werden:

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Verändern Sie a und b und berechnen Sie den neuen Flächeninhalt durch:

$$F = \frac{1}{2} \cdot (0{,}8 \cdot a) \cdot (1{,}2 \cdot b)$$

Ergebnis: Es ergibt sich anhand der Rechnung der Faktor 0,96.

(44) Berechnen Sie ohne Taschenrechner 4 % von:

(a) 100 (b) 3100 (c) 42 (d) 0,063

Man kann Prozent folgendermaßen umschreiben:

$$x\ \% = \frac{x}{100}$$

Ergebnis:

(a) 4 (b) 124 (c) 1,68 (d) 0,00252

(45) Berechnen Sie jeweils die fehlende Größe.

(a) 60 % von 25 Schüler*innen einer Klasse fahren mit dem Bus zur Schule. Berechnen Sie den Prozentwert.
(b) 14 % der Bewohner*innen einer Kleinstadt sind unter 20 Jahre alt. Das sind 749 Personen. Berechnen Sie die gesamte Einwohner*innenzahl.
(c) Karoline hat 430 Seiten eines 820-seitigen Buches gelesen. Berechnen Sie den Prozentsatz der gelesenen Seiten.

Es gilt der Zusammenhang:

$$\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$$

Ergebnis:

(a) 15 (b) 5350 (c) 52,44 %

2.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ermitteln

2.4.1 Rechnen mit Potenz- und Wurzeltermen

(46) Schreiben Sie in die Form $\sqrt[n]{x^m}$ bzw. $x^{\frac{m}{n}}$ um.

(a) $2^{\frac{a}{b}}$ (b) $u^{\frac{7}{3}}$ (c) $\sqrt[5]{v^7}$ (d) $\sqrt{(a+b)}$ (e) $\sqrt[a]{2^b}$

Es gilt:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Ergebnis:

(a) $\sqrt[b]{2^a}$ (b) $\sqrt[3]{u^7}$ (c) $v^{\frac{7}{5}}$ (d) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ (e) $2^{\frac{b}{a}}$

(47) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

(a) $u^4v^{-4}uv^3u^{-7}v^{-1}uv^2$ (b) $u^{n-1}\left(u^{n+3}+u^{2-2n}\right)$ (c) $\dfrac{u^4v^{-9}}{u^{-2}v^{-8}}$

(a) Beim Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert.

Ergebnis: u^{-1}

(b) Beim Addieren von Potenzen müssen sowohl die Basis als auch der Exponent übereinstimmen. Beim Multiplizieren solcher Potenzen werden die Exponenten addiert.

Ergebnis: $u^{2n+2}+u^{1-n}$

(c) Beim Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis wird der Exponent des Nenners vom Exponenten des Zählers subtrahiert.

Ergebnis: $\dfrac{u^6}{v}$

(48) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke unter Verwendung gebrochener Exponenten. Es gilt die Annahme $x, u, v, w > 0$.

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$ (b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ (c) $\dfrac{w\sqrt{uv^3w^{-2}}}{v\sqrt{u^2vw}}$

(a) Beim Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis wird der Exponent des Nenners vom Exponenten des Zählers subtrahiert.

Ergebnis: $x^{\frac{5}{6}}$

(b) Beim Potenzieren einer Potenz werden die Exponenten miteinander multipliziert.

Ergebnis: $x^{\frac{1}{8}}$

(c) Es gilt: $\sqrt{n \cdot m} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{m}$.

Ergebnis: $(uw)^{-\frac{1}{2}}$

(49) Ein Blatt Papier ist $100\,\mu$m dick. Wie dick ist es, nachdem es 11-mal gefaltet wurde?

Beim einmaligen Falten wird die Dicke mit 2 multipliziert: $100\,\mu m \cdot 2$.
Beim zweimaligen Falten wird erneut mit 2 multipliziert: $100\,\mu m \cdot 2 \cdot 2 = 100\,\mu m \cdot 2^2$. usw.

Ergebnis: $0{,}2048\,m$

2.4.2 Binomische Formeln

(50) Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie anschließend so weit wie möglich:

(a) $(13a - 7b)^2$
(b) $(6c - 4d)(6c + 4d)$
(c) $(u + v)^2 - (u - v)^2$
(d) $(u + v)^2 + (u - v)^2$

(a) Es gilt die zweite binomische Formel.

Ergebnis:
$(13a - 7b)^2 = (13a)^2 - 2 \cdot 13a \cdot 7b + (7b)^2 = 169a^2 - 182ab + 49b^2$

(b) Es gilt die dritte binomische Formel.

Ergebnis: $36c^2 - 16d^2$

(c) Es gelten die erste und zweite binomische Formel.

Ergebnis: $4uv$

(d) Es gelten die erste und zweite binomische Formel.

Ergebnis: $2u^2 + 2v^2$

(51) Berechnen Sie mithilfe des Distributivgesetzes oder der binomischen Formeln:

(a) $81 \cdot 79$ (b) 39^2 (c) $13{,}7^2$ (d) $7{,}3 \cdot 4{,}8$ (e) 97^2

(a) Sie können die dritte binomische Formel anwenden mit $(80 + 1) \cdot (80 - 1)$.

Ergebnis: 6399

(b) Sie können die erste oder zweite binomische Formel anwenden, z.B. mit $(40 - 1)^2$.

Ergebnis: 1521

(c) Sie können die erste oder zweite binomische Formel anwenden, z.B. mit $(13 + 0{,}7)^2$.

Ergebnis: 187,69

(d) Sie können das Distributivgesetz anwenden und erhalten
$(7 + 0{,}3) \cdot (4 + 0{,}8) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 0{,}8$.

Ergebnis: 35,04

(e) Sie können die erste oder zweite binomische Formel anwenden, z.B. mit $(100-3)^2$.

Ergebnis: 9409

(52) Führen Sie eine quadratische Ergänzung durch:*

(a) x^2+5x+2 (b) $2x^2-8x+6$ (c) $-\frac{1}{2}x^2+5x+9$

(a) Addieren Sie eine Zahl (hier $\left(\frac{5}{2}\right)^2=6{,}25$) hinzu, sodass Sie die erste binomische Formel bilden können. Ziehen Sie die Zahl in der gleichen Rechnung wieder ab (Nullergänzung):

$$x^2+5x+6{,}25-6{,}25+2$$

Ergebnis: $(x+2{,}5)^2-4{,}25$

(b) Klammern Sie aus den Ausdrücken mit x die Zahl vor dem x^2 aus und führen Sie in der Klammer die quadratische Ergänzung durch:

$$2(x^2-4x+4-4)+6$$

Bilden Sie die binomische Formel und verrechnen Sie die restlichen Zahlen miteinander.

Ergebnis: $2\,(x-2)^2-2$

(c) Klammern Sie aus den Ausdrücken mit x die Zahl vor dem x^2 aus und führen Sie in der Klammer die quadratische Ergänzung durch:

$$-\frac{1}{2}(x^2-10x+25-25)+9$$

Bilden Sie die binomische Formel und verrechnen Sie die restlichen Zahlen miteinander.

Ergebnis: $-\frac{1}{2}\,(x-5)^2+21{,}5$

(53) Vereinfachen Sie den Ausdruck:[21] $\dfrac{4-x^2}{4-4x+x^2}$

Wie können Sie Zähler und Nenner jeweils mithilfe der binomischen Formeln umformen?

Ergebnis: $\dfrac{(2+x)(2-x)}{(2-x)^2}=\dfrac{2+x}{2-x}$

(54) Multiplizieren Sie aus:

(a) $(2^x+5^x)^2$ (b) $(3^x+3^{-x})^2$ (c) $(e^{3x}+e^{4x})(e^{3x}-e^{4x})$

(a) Sie können die erste binomische Formel nutzen.

Ergebnis: $2^{2x}+2\cdot 10^x+5^{2x}$

(b) Sie können die erste binomische Formel nutzen.

Ergebnis: $3^{2x}+2+3^{-2x}$

(c) Sie können die dritte binomische Formel nutzen.

Ergebnis: $e^{6x}-e^{8x}$

2.4.3 Rechnen mit Logarithmen*

(55) Wenden Sie die Definition des Logarithmus und die Logarithmengesetze an.

(a) Bestimmen Sie

i. $\log_2 16$ ii. $\log_5 \sqrt{5}$ iii. $\log_3 \frac{1}{9}$ iv. $10^{\log_{10} 8}$

i) Für welche Potenz von 2 ist das Ergebnis 16?

Ergebnis: 4

ii) Für welche Potenz von 5 ist das Ergebnis $\sqrt{5}$?

Ergebnis: $\frac{1}{2}$

iii) Für welche Potenz von 3 ist das Ergebnis $\frac{1}{9}$?

Ergebnis: -2

iv) Das Logarithmieren kehrt das Potenzieren um.

Ergebnis: 8

(b) Formen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze um $(a, u, v, x, y, z > 0)$.***

i. $\log_a \left(\frac{x^2 y^3}{u^4 v}\right)$ ii. $\frac{\log_a(x^3)}{\log_a(\sqrt[4]{x})}$ iii. $\log_a(u) - \log_a(v) + 4\log_a(z)$

Folgende Logarithmusgesetze werden für die Lösung der Aufgaben verwendet:

1) Produktregel: $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2) Quotientenregel: $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3) Potenzregel: $\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$

Ergebnis:

i) $2 \cdot \log_a(x) + 3 \cdot \log_a(y) - 4 \cdot \log_a(u) - \log_a(v)$

ii) $\frac{3 \cdot \log_a(x)}{\frac{1}{4} \cdot \log_a(x)} = 12$

iii) $\log_a(\frac{u \cdot z^4}{v})$

2.5 Gleichungen mit einer Unbekannten

2.5.1 Lineare und quadratische Gleichungen

(56) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Nutzen Sie beispielsweise die pq-Formel oder abc-Formel.

Ergebnis: $x_1 = -1 \qquad x_2 = 4$

(57) Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{2x-1}{4}$ nach x auf.

Multiplizieren Sie beide Seiten mit dem Nenner und lösen Sie danach die Gleichung nach x auf.

Ergebnis: $x = 2 \cdot y + 0{,}5$

(58) Welche der Aussagen sind in Bezug auf die Gleichung $(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)(x^2-9) = 0$ richtig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.[22]

(a) Die Lösungen kann man ohne komplizierte Rechnungen angeben.

(b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.

(c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.

(d) $x = 1{,}4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.

(e) Es gibt genau vier Lösungen.

(a) Ergebnis:

Ja. In der vorliegenden Produktform können die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$ direkt abgelesen werden. Die dritte und vierte Nullstelle $x_{3,4} = \pm 3$ ergeben sich ohne komplizierte Rechnung.

(b)-(d) Überprüfen Sie die Aussagen durch das Einsetzen der Werte.

(b) Ergebnis:

Die Aussage ist falsch, denn $x = 1$ ist keine Lösung.

(c) Ergebnis:

Die Aussage ist richtig.

(d) Ergebnis:

Die Aussage ist falsch, denn $x = 1{,}4142$ ist zwar eine Näherung für $\sqrt{2}$, aber keine Nullstelle.

(e) Ergebnis:

Die Aussage ist richtig. Aus dem Satz vom Nullprodukt (Gleichung liegt in Produktform vor.) folgt, dass die Gleichung genau vier Lösungen hat.

(59) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

(a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (b) $4x^2 = 12x - 8$ (c) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

Sie können die abc-Formel oder die pq-Formel verwenden. Beachten Sie bei der pq-Formel, dass sie vor der Anwendung durch den Vorfaktor von x^2 teilen müssen.

(a) Ergebnis: $x = 3$

(b) Ergebnis: $x_1 = 1;\ x_2 = 2$

(c) Ergebnis: $x_1 = 0{,}8;\ x_2 = 1$

2.5.2 Einfache Exponentialgleichungen*

(60) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $5^x = 34$ (b) $2^{4x+3} = 128$ (c) $\frac{6^{x-2}}{36^{x+1}} = 216$

Nutzen Sie den Logarithmus. Es gilt: $a^x = b \Leftrightarrow x = log_a(b)$

(a) Ergebnis: $x \approx 2{,}191$

(b) Ergebnis: $x = 1$

(c) Sie können Zähler und Nenner auf die gleiche Basis bringen.
Es gilt:

$$\frac{6^{x-2}}{36^{x+1}} = \frac{6^{x-2}}{(6^2)^{x+1}} = \frac{6^{x-2}}{6^{2x+2}} = 6^{-x-4}$$

und $216 = 6^3$.

Ergebnis: $x = -7$

2.5.3 Gleichungen durch Faktorisieren lösen

(61) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

Klammern Sie x aus.

Ergebnis: $x_1 = 0;\ x_2 = 3$

2.5.4 Gleichungen durch Substitution lösen

(62) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Substituieren Sie mit $z := x^2$ und lösen Sie die Gleichung $z^2 - 13z + 36 = 0$.

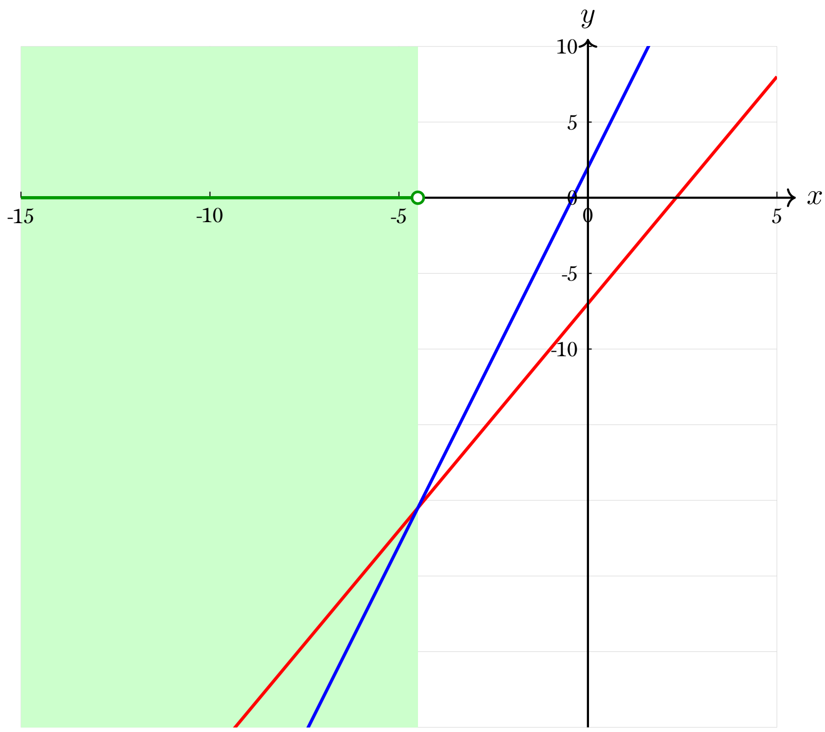
Ergebnis: $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 3$

2.6 Ungleichungen mit einer Unbekannten

(63) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 7 > 2 + 5x$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.[23]

Verfahren Sie wie mit einer Gleichung. (Ausnahme: Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder wird auf beiden Seiten durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.)

Ergebnis: $x < -4{,}5$



3 Elementare Geometrie und Trigonometrie

Die Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit den Eigenschaften von Objekten im Raum befasst. Auf der einfachsten Ebene wie z. B. der Flächenbestimmung oder der Anwendung einfacher geometrischer Sätze benötigen alle Studienbereiche entsprechende Vorkenntnisse. Für die Studienbereiche Bauingenieurwesen, Informatik und Ingenieurwissenschaften sind darüber hinaus Vorkenntnisse über trigonometrische Beziehungen im Dreieck erforderlich. Studienanfänger*innen in den Bereichen Bauingenieurwesen und Ingenieurwissenschaften sollten darüber hinaus in der Lage sein, Oberfläche und Volumen einfacher Körper zu berechnen. Im Einzelnen sollen die Studienanfänger*innen können:

- elementargeometrische Objekte identifizieren und anhand ihrer Eigenschaften wie Umfang, Oberfläche und Volumen untersuchen (Kapitel 3.1, Aufgaben 64, 71 - 74)
- grundlegende Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) verstehen und anwenden (Kapitel 3.1, Aufgaben 65 - 70)
- verschiedene Winkelmaße unterscheiden und ineinander umrechnen (Kapitel 3.2, Aufgabe 75)
- Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen (Kapitel 3.2, Aufgaben 76 - 78)

3.1 Elementare Geometrie

3.1.1 Elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren

, , ,

Siehe auch Aufgabe 4.

(64) (a) Wie viele Quadrate und wie viele Rauten sind hier dargestellt?[24]

Quadrat: Vier gleich lange Seiten und vier rechte Winkel.

Raute: Vier gleich lange Seiten, von denen zwei gegenüberliegende parallel sind.

Ergebnis:

Sowohl 2 Quadrate als auch 2 Rauten.

(b) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate sind.

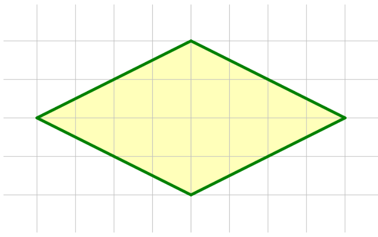
Ergebnis:

Beide Objekte haben vier gleich lange Seiten und vier rechte Winkel. Es handelt sich also um Quadrate.

(c) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.

Die Raute darf keine rechten Winkel haben.

Ergebnis:

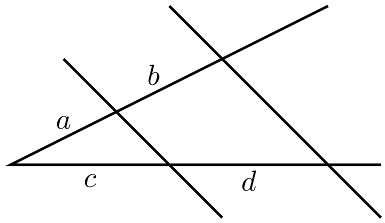


3.1.2 Grundlegende Sätze der Elementargeometrie

(65) Gegeben ist nebenstehende Abbildung. Bestimmen Sie jeweils die fehlende Größe.

(a) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ d = ?$

(b) $a = 7,\ b = 5,\ d = 10,\ c = ?$

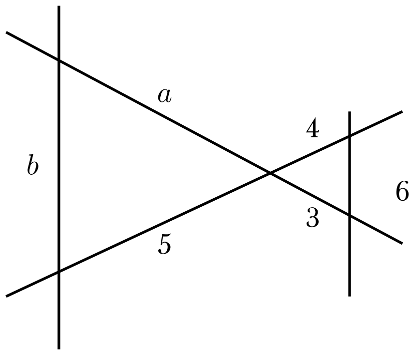


Nutzen Sie die Strahlensätze.

Es gilt die Beziehung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ergebnis: (a) $d = 6$
(b) $c = 14$

(66) Gegeben ist nebenstehende Abbildung.
Bestimmen Sie die fehlenden Größen a und b.



Nutzen Sie die Strahlensätze.

Es gelten die Beziehungen : $\frac{b}{6} = \frac{a}{3}$ und $\frac{6}{b} = \frac{4}{5}$

Ergebnis: $a = \frac{15}{4}$; $b = \frac{15}{2}$

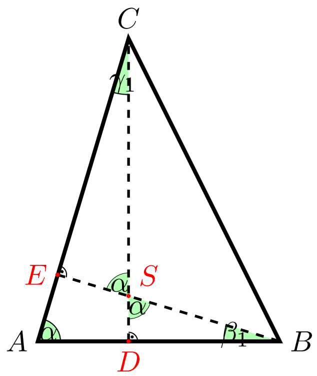
(67) Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sind nun D der Höhenfußpunkt von C, E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB.[25]

(a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.

(b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE, ADC, BEA und SDB ähnlich sind.

(a) Gehen Sie Schritt für Schritt vor. Der Schnittpunkt der Höhe mit der Seite heißt Höhenfußpunkt.

Ergebnis:



(b) Sie können über den Zusammenhang zwischen den Winkeln argumentieren.

Ergebnis:
Durch die Höhenfußpunkte D und E haben alle Dreiecke jeweils einen rechten Winkel.
Das Dreieck ADC besitzt die Winkel α, γ_1 und einen rechten Winkel, d.h. $\alpha + \gamma_1 + 90° = 180°$.
Das Dreieck SCE hat auch einen rechten Winkel und den Winkel γ_1.
Da die Winkelsumme auch hier $180°$ ergeben muss, ist der unbekannte Winkel an Punkt S gleich dem Winkel α.
Im Dreieck BEA sind der rechte Winkel, α und β_1 bekannt. Das bedeutet $\alpha + \beta_1 + 90° = 180°$.
Mit der bereits bekannten Gleichung aus Dreieck ADC bedeutet das, dass $\beta_1 = \gamma_1$ gilt.
In dem letzten Dreieck SDB können Sie entweder über die Winkelsumme oder über den Scheitelwinkel am Punkt S argumentieren, dass der unbekannte Winkel gleich α sein muss.

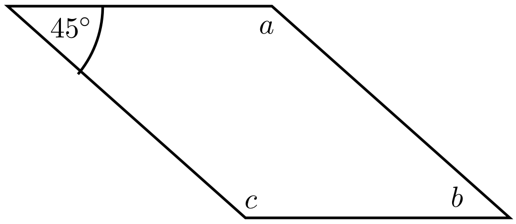
(68) In einem Fünfeck gibt es die Winkel $\alpha_1 = 80°$, $\alpha_2 = 130°$, α_3 und $\alpha_4 = 110°$.
Berechnen Sie den fehlenden Winkel.

Die Winkelsumme in einem Vieleck mit n Ecken berechnet sich nach der Formel:

$(n - 2) \cdot 180°$

Ergebnis: $\alpha_5 = 110°$

(69) Bestimmen Sie die Winkel a, b und c in dem nebenstehenden Parallelogramm.



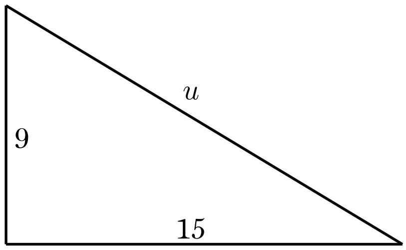
Beachten Sie die Eigenschaften von Parallelogrammen (wie z.B. Winkelsumme im gesamten Viereck und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Winkeln).

Ergebnis: $b = 45°; \ a = c = 135°$

(70) Gegeben sind die unten dargestellten rechtwinkligen Dreiecke.
Beide Teilaufgaben können durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras gelöst werden.

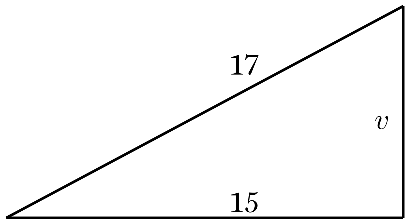
(a) Bestimmen Sie die Länge der Hypotenuse u.
$u^2 = 9^2 + 15^2$

Ergebnis: $u = \sqrt{306} \approx 17{,}49$



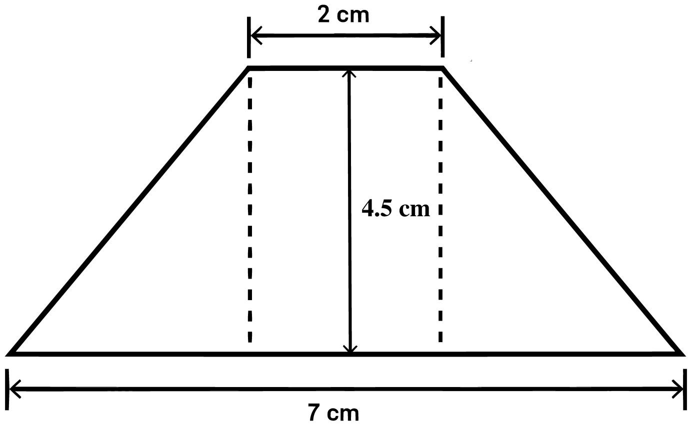
(b) Bestimmen Sie die Länge der Kathete v.
$v^2 + 15^2 = 17^2$
Lösen Sie die Gleichung nach v auf.

Ergebnis: $v = 8$



3.1.3 Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen

(71) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des achsensymmetrischen Trapezes in der nebenstehenden Abbildung.



Nutzen Sie für den Flächeninhalt die Formel:

$$A = \frac{(a+c)\cdot h}{2} = \frac{(7+2)\cdot 4{,}5}{2}$$

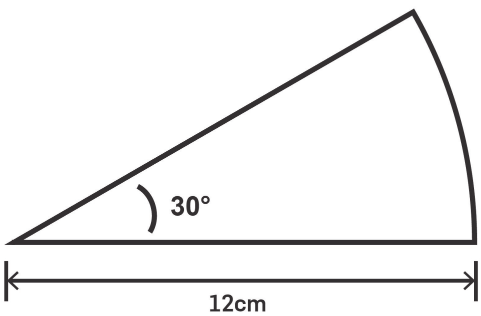
Ergebnis: $A = 20{,}25\,cm^2$

Der Umfang ist die Summe aller Seitenlängen. Die Länge der Schenkel kann mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden.

$$s = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}15\,cm$$

Ergebnis: $U \approx 19{,}3\,cm$

(72) Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Länge des Kreisbogenabschnitts in der nebenstehenden Abbildung.

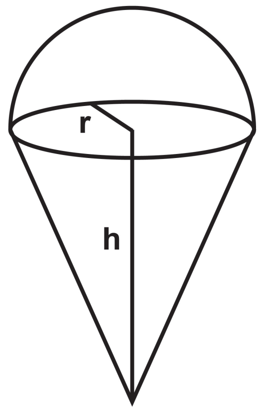


Der Vollkreis hat den Flächeninhalt $A = \pi \cdot 12^2\,cm^2$ und den Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot 12\,cm$. Welchen Anteil an einem Vollkreis hat der dargestellte Kreisausschnitt?

Ergebnis: $A \approx 37{,}699\ cm^2$
$U \approx 6{,}283\ cm$

3.1.4 Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen

(73) Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Körper, der aus einem Kegel und einer Halbkugel besteht. Es ist $r = 5\,cm$ und $h = 10\,cm$. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.



Berechnen Sie die Teilkörper einzeln und addieren sie die Volumina.

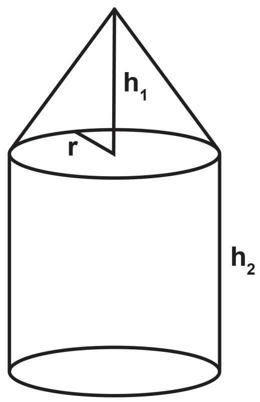
Ergebnis: $V \approx 523{,}599\ cm^3$

Die Oberfläche besteht aus dem Kegelmantel und der Mantelfläche der Kugel. Die Länge der Mantellinie s des Kegels kann mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden.

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} \approx 11{,}18\,cm$$

Ergebnis: $O \approx 332{,}695\ cm^2$

(74) Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Körper, der aus einem Kreiszylinder und einem Kegel besteht. Der Radius von Kegel und Zylinder beträgt $r\ cm$, die Höhen betragen $h_1 = 2 \cdot r$ und $h_2 = 1{,}5 \cdot h_1$. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.



Berechnen Sie die Teilkörper einzeln und addieren Sie die Volumina.

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h_2 = 3 \cdot \pi \cdot r^3$$

Ergebnis:

$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 + 3 \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{11}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Die Oberfläche besteht aus dem Kegelmantel M_K, der Mantelfläche des Zylinders M_Z und seiner Grundfläche G.
Sie müssen die Flächen einzeln berechnen und dann addieren.
Die Mantellinie des Kegels lässt sich mit dem Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{r^2 + h_1^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot 5} \\ &= r \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} M_K &= \pi \cdot r \cdot s \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{5} \\ M_Z &= \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h_2 \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot 6 \end{aligned}$$

und

$$O = \pi \cdot r^2$$

Ergebnis:
$O = \pi \cdot r^2 \cdot (\sqrt{5} + 6 + 1) = \pi \cdot r^2 \cdot (\sqrt{5} + 7)$

3.2 Trigonometrie

,,

3.2.1 Gradmaßund Bogenmaßunterscheiden und ineinander umrechnen*

(75) Ergänzen Sie die folgende Tabelle. Schreiben Sie die Winkel im Bogenmaßals Vielfache von π.[26]

2π entsprechen 360°

Bogenmaß	π	$\pi/4$	$-\pi/3$	$3\pi/2$	$\pi/10$	1
Gradmaß	180°	45°	−60°	270°	18°	57,296°

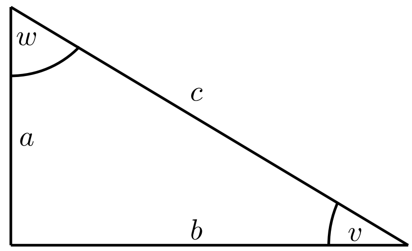
3.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen

(76) Bestimmen Sie die fehlenden Größen des rechtwinkligen Dreiecks in der nebenstehenden Abbildung.

(a) $a = 5\,cm,\ w = 65°$

(b) $v = 12°,\ c = 89\,cm$

(c) $a = 7{,}3\,cm,\ b = 9{,}9\,cm$



Beachten Sie die Definitionen von sin, cos und tan durch die Katheten und die Hypotenuse. Hilfreich ist auch der Satz von Pythagoras.

Ergebnis:

(a) $v = 25°,\ c \approx 11{,}831\ cm,\ b \approx 10{,}732\ cm$
(b) $w = 78°,\ a \approx 18{,}504\ cm,\ b \approx 87{,}055\ cm$
(c) $v \approx 36{,}4°,\ w \approx 53{,}6°,\ c \approx 12{,}300\ cm$

(77) Eine $4\,m$ lange Leiter wird in einer Höhe von $3{,}80\,m$ an eine Hauswand gelehnt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Leiter und dem Boden sowie den Abstand zwischen der Wand und den Füßen der Leiter.[27]

Zeichnen Sie sich das Bild auf und verwenden Sie trigonometrische Beziehungen und den Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke.

Ergebnis:

Die Leiter steht ca. 1,25 m von der Wand entfernt. (Pythagoras)
Der Winkel beträgt $\alpha \approx 71{,}805°$.

(78) Von der auf $1800\,m$ Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf $1100\,m$ Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von $42°$ gegenüber der Waagerechten. Erläutern Sie, welche Größen sich mit Hilfe der Trigonometrie berechnen lassen.[28]

Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe als Gegenkathete und der Entfernung zur Talstation als Ankathete.

Ergebnis:

Mithilfe von Sinus lässt sich die horizontale Entfernung e berechnen ($e \approx 1222\,m$). Die Entfernung l, die die Seilbahn zwischen den beiden Stationen zurücklegt ($l \approx 1644\,m$), lässt sich durch den Tangens berechnen.

4 Analysis

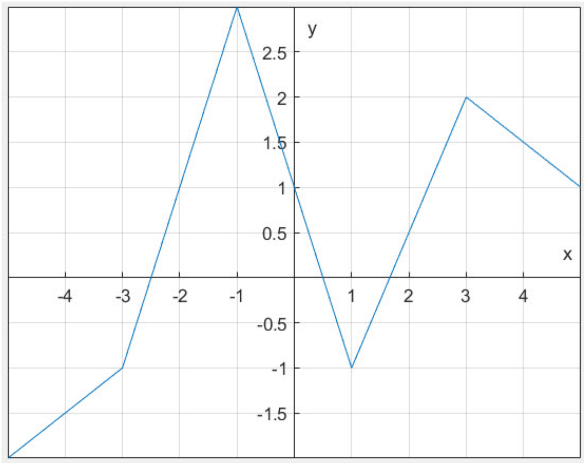
Funktionale Zusammenhänge treten in den Naturwissenschaften und der Technik ebenso wie in den Wirtschaftswissenschaften oder der Informatik in vielfältiger Weise auf. Daher ist es für Studienanfänger*innen essenziell, dass sie derartige Zusammenhänge erkennen und mit elementaren Funktionen wie linearen oder quadratischen bzw. allgemeinen Polynomfunktionen umgehen können. Konkret bedeutet dies:

- Funktionen unterschiedlichen Typs identifizieren und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersuchen (Kapitel 4.1, Aufgaben 79, 83, 88)
- Funktionen unterschiedlichen Typs darstellen und zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen wechseln (Kapitel 4.1, Aufgaben 80 - 82, 84 - 87)
- den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion verstehen (Kapitel 4.2, Aufgaben 89, 90, Kapitel 1.4, Aufgabe 20)
- Differentiationsregeln kennen und auf elementare Funktionen anwenden (Kapitel 4.2, Aufgaben 91, 92)
- eine Grundvorstellung über das bestimmte Integral besitzen (Kapitel 4.3, Aufgaben 93 - 95)
- den Zusammenhang zwischen einer Funktion und einer zugehörigen Stammfunktion kennen und Stammfunktionen bilden (Kapitel 4.3, Aufgaben 96, 97)
- bestimmte Integrale elementarer Funktionen mithilfe von Stammfunktionen berechnen (Kapitel 4.3, Aufgabe 98)

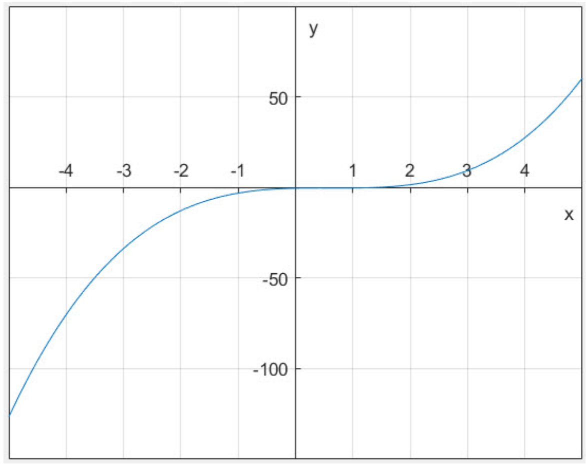
4.1 Funktionen

4.1.1 Grundvorstellung des funktionalen Zusammenhangs

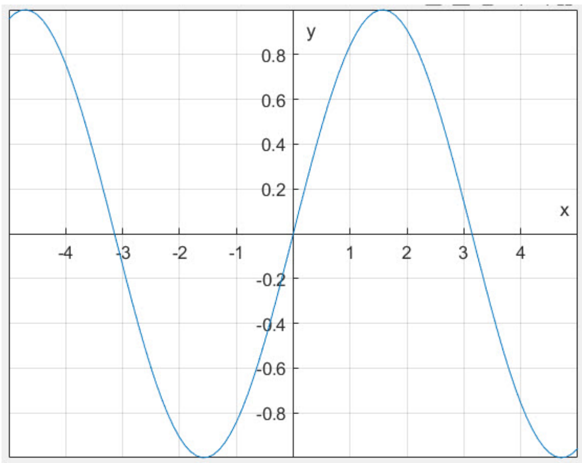
(79) Markieren Sie diejenigen der unten stehenden Abbildungen, in denen der abgebildete Graph eine Funktion $y = f(x)$ darstellt.



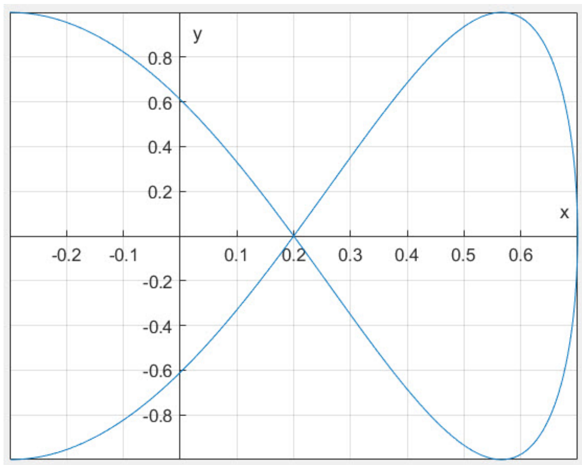
(a)



(b)



(c)



(d)

Eine Funktion f ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.

<u>Ergebnis:</u> Die Abbildungen (a), (b) und (c) stellen Funktionen $y = f(x)$ dar.

4.1.2 Lineare Funktionen (inkl. proportionale Funktionen)

(80) Eine Pflanze wächst täglich um $0{,}5\,mm$. Am Anfang ist die Pflanze $55\,mm$ groß.

(a) Wie groß ist die Pflanze nach 10 Tagen?

Ergebnis: $60\,mm$

(b) Geben Sie eine Funktion an, die die Größe der Pflanze zu einem beliebigen Zeitpunkt t angibt.

Es handelt sich um lineares Wachstum mit Anfangswert $55\,mm$.

Ergebnis: $f(t) = 0{,}5 \cdot t + 55$

(81) Stellen Sie die Geradengleichung $y = mx + b$ auf:

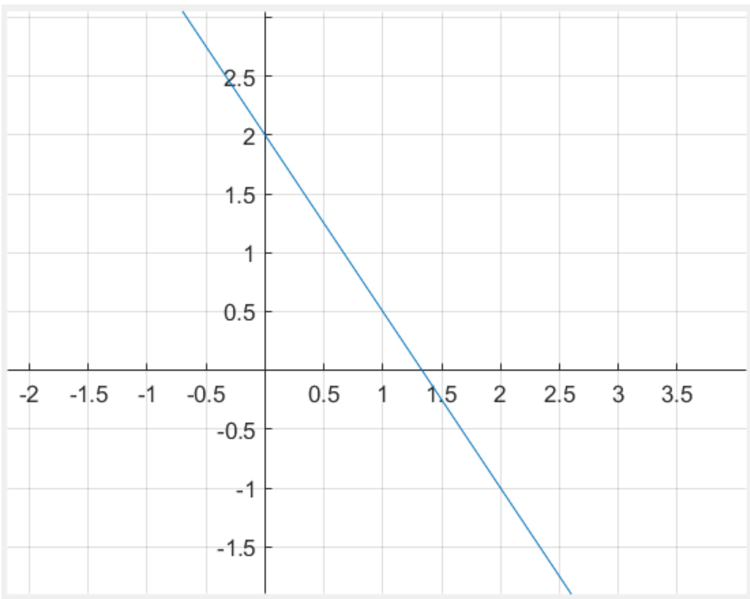
(a) Die Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(-2|3)$ und $P_2(2|-4)$.
Setzen Sie nacheinander die Punkte in die Gleichung ein und lösen Sie das entstandene lineare Gleichungssystem nach m und b auf.

Ergebnis: $y = -1{,}75x - 0{,}5$

(b) Die Gerade hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|3)$.
Setzen Sie m und den Punkt in die Gleichung ein und lösen Sie nach b auf.

Ergebnis: $y = 3x + 6$

(82) Geben Sie die Geradengleichung zu der in der Abbildung dargestellten Geraden an.



Suchen Sie zwei gut ablesbare Punkte aus, welche auf der Geraden liegen, und ermitteln Sie die Steigung gemäß$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Dann können Sie die Geradengleichung bestimmen $y = m \cdot x + b$.

Ergebnis: $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 2$

4.1.3 Quadratische Funktionen

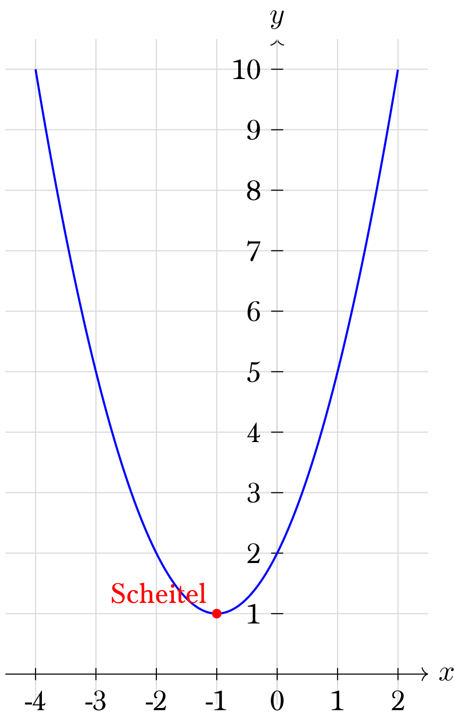
(83) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Mit dem Ansatz $0 = 2x^2 + 4x - 6$ erhalten Sie eine quadratische Gleichung.

Ergebnis: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

(84) Skizzieren Sie die Parabel $y = (x + 1)^2 + 1$.

Es handelt sich um eine Normalparabel, welche verschoben ist. Der Scheitelpunkt lässt sich ablesen $y = a(x - c)^2 + d$; $S(c|d)$.

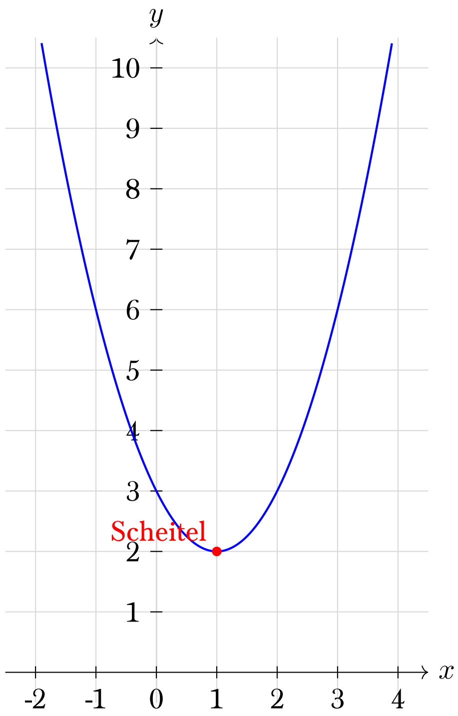


(85) Bestimmen Sie die Scheitelform der Parabel $y = x^2 - 2x + 3$ und skizzieren Sie diese anschließend.

Addieren Sie eine Zahl, sodass eine binomische Formel entsteht. Ziehen Sie die Zahl in der gleichen Rechnung wieder ab:

$y = x^2 - 2 \cdot 1x + 1 - 1 + 3$ (Nullergänzung bzw. quadratische Ergänzung)

Ergebnis: $y = (x - 1)^2 + 2$



(86) Die Punkte $P_1(-1|12), P_2(2|15)$ und $P_3(5|-18)$ liegen auf der Parabel $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Bestimmen Sie die Parabelgleichung.

Setzen Sie die Koordinaten der drei Punkte nacheinander in die allgemeine Parabelgleichung ein. Dadurch erhalten Sie ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die Unbekannten a_2, a_1 und a_0.

Ergebnis: $y = -2x^2 + 3x + 17$

4.1.4 Polynomfunktionen höheren Grades

(87) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^3 + 7x - 5x^2 + 1$. Berechnen Sie $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

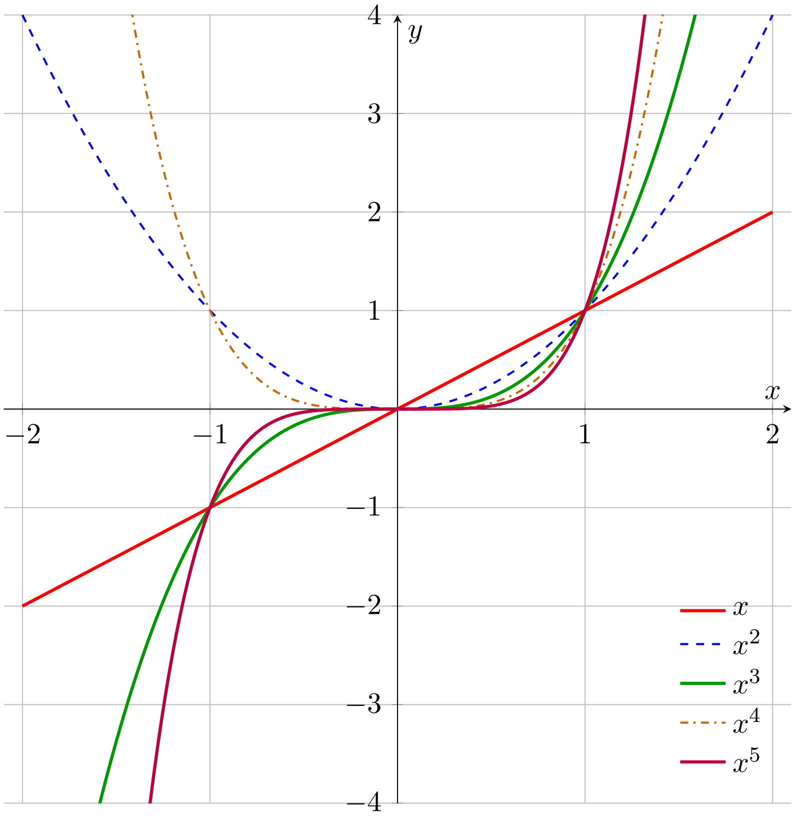
Für x wird $\dfrac{1}{2}$ eingesetzt.

Ergebnis: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}625$

4.1.5 Potenzfunktionen

(88) Skizzieren Sie für $k = 1, \dots, 5$ die Funktionsgraphen von $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ im Intervall $[-2{,}2]$.

Wenn der Exponent k gerade ist, ist die Funktion achsensymmetrisch. Wenn k ungerade ist, dann ist die Funktion punktsymmetrisch.



4.2 Differenzialrechnung

4.2.1 Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate und als Tangentensteigung verstehen

(89) Beurteilen Sie die nachfolgenden Aussagen und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an, wenn eine Aussage nicht allgemeingültig ist.[29]

(a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.

Ergebnis:

Ein einzelner Funktionswert an einer bestimmten Stelle sagt nichts über die Ableitung an dieser Stelle aus. Z.B. hat die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$ an der Stelle 2 den Wert 1, aber es gilt $f'(2) = 0$.

(b) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.

Ergebnis:

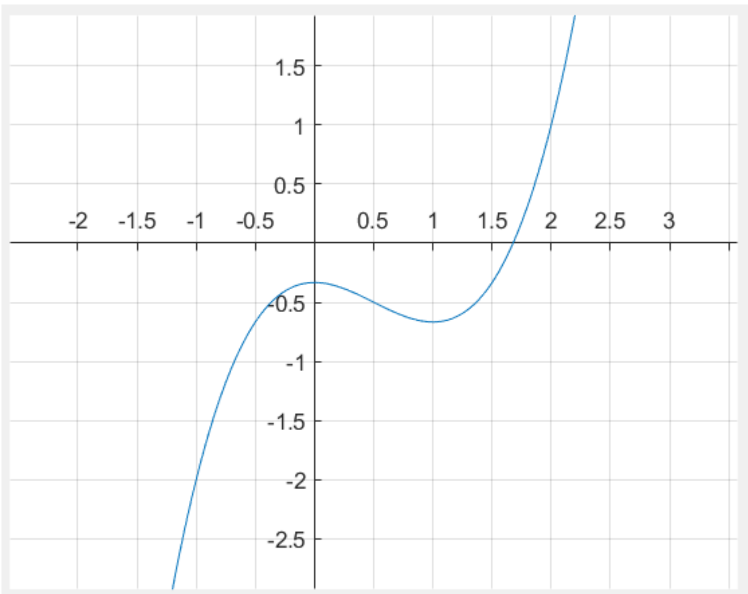
Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ wird durch $f'(1)$ angegeben. Zwischen $f'(2)$ und $f'(1)$ besteht im Allgemeinen aber kein Zusammenhang. Betrachte z.B. die Parabel $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. Es gilt $f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, aber $f'(1) = \frac{1}{2}$.

(c) Die lokale Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$ an der Stelle -3 ist positiv.

Ergebnis:

Das ist richtig, denn die lokale Änderungsrate wird durch $f'(x) = -0{,}5 \cdot 2 \cdot x = -1 \cdot x$ berechnet. Tatsächlich ist $f'(-3) = 3$ positiv.

(90) Betrachten Sie folgenden Funktionsgraphen und markieren Sie jeweils die Bereiche auf der x-Achse, in denen die Ableitungsfunktion Werte kleiner als 0, gleich 0 und größer als 0 annimmt.



Betrachten Sie die Steigung des Graphen.

Ergebnis:
In Interallschreibweise kann man folgende Bereiche unterscheiden:
$f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty, 0)$; $f'(0) = 0$;
$f'(x) < 0$ für $x \in (0, 1)$; $f'(1) = 0$;
$f'(x) > 0$ für $x \in (1, \infty)$.

4.2.2 Differentiationsregeln

(91) Die Funktionen f und g sind differenzierbar und α ist eine reelle Zahl. Welche Ableitungsregeln sind richtig?

(a) Die Ableitung von αf ist $\alpha f'$.
(b) Die Ableitung der Summe $f + g$ ist $f' + g'$.
(c) Die Ableitung des Produkts $f \cdot g$ ist $f' \cdot g'$.

(a) Faktorregel

Ergebnis:
richtig $(\alpha f)' = \alpha f'$

(b) Summenregel

Ergebnis:
richtig $(f + g)' = f' + g'$

(c) Produktregel

Ergebnis:
falsch $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

(92) Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = 4\pi^2$
(b) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 1$
(c) $f(x) = (2 - x^3)^4$
(d) $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$

(a) Überlegen Sie, wie die Ableitung einer konstanten Funktion aussieht.

Ergebnis: $f'(x) = 0$

(b) Nutzen Sie die Summenregel.

Ergebnis: $f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + 8x$

(c) Nutzen Sie die Kettenregel.

Ergebnis: $f'(x) = 4(2 - x^3)^3 \cdot (-3x^2) = -12x^2(2 - x^3)^3$

(d) Nutzen Sie die Ketten-und Produktregel.

Ergebnis: $f'(x) = 3(x - 2)^2 \cdot (x + 1)^2 + 2(x - 2)^3 \cdot (x + 1)$

4.3 Integralrechnung*

4.3.1 Bestimmtes Integral als Grenzwert von Summen verstehen

(93) (a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$, indem Sie das Intervall $[0{,}1]$ in fünf gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.

Berechnen Sie die Summe der Rechteckstreifen mit Breite 0,2 unterhalb des Graphen. Die Höhe jedes Rechtecks ist jeweils der kleinste Funktionswert von $f(x) = x^2$ im Teilintervall.

Ergebnis: $0{,}2 \cdot (f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)) = 0{,}24$

(b) Wie kann man den Näherungswert verbessern?

Ergebnis: Der Näherungswert wird genauer, je feingliedriger die Unterteilung wird.

(c) Wie erhält man den exakten Wert des Integrals?[30]

Erweitern Sie den Gedanken von (b).

Ergebnis:

Die Unterteilung noch feiner machen, so dass die Breite der Rechtecke gegen Null strebt. Den exakten Wert erhält man als Grenzwert dieser immer feineren Unterteilung.

4.3.2 Bestimmtes Integral sowohl als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate als auch als orientierten Flächeninhalt interpretieren

(94) Bei einem Becken, das zu Beginn $2000\,m^3$ Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Zuflussgeschwindigkeit kann für $t \in [0{,}70]$ durch die Funktion f beschrieben werden:
$f(t) = -t^2 + 40t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3/Tag).
Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt. Berechnen Sie, wie viel Wasser sich nach 30 Tagen im Becken befindet.[31]

Arbeiten Sie mit einer geeigneten Stammfunktion F von f.
Ergebnis:

$F(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 20t^2 + 225t + 2000$; Menge nach 30 Tagen: $F(30) = 17\,750\ m^3$

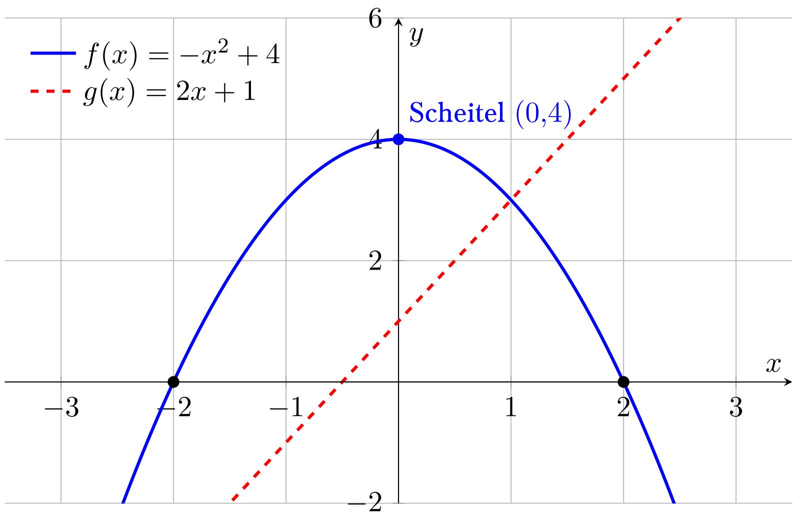
(95) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2x + 1$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.[32]

(a) Ergebnis:



(b) Ergebnis: $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \dfrac{32}{3}$

(c) Berechnen Sie zunächst die Schnittstellen der Funktion und berechnen Sie dann die Fläche zwischen den Graphen durch Integration. Beachten Sie, dass der Graph von f zwischen den Schnittstellen oberhalb von g verläuft.

Ergebnis: $A = \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx = \dfrac{32}{3}$

4.3.3 Begriff der Stammfunktion und Stammfunktionen grundlegender Funktionen

(96) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar. Ihre Ableitung ist f'. Welche Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.[33]

(a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.

Ergebnis:

Richtig. Da f differenzierbar ist, hat die Funktion genau eine Ableitung. Durch die Addition von beliebigen Konstanten c zur Stammfunktion, können beliebig viele Stammfunktionen $F + c$ erzeugt werden.

(b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f.

Ergebnis:

Falsch. Es gilt: $(F + G)' = f + f = 2f$ (Summenregel bei der Ableitung).

(c) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.

Ergebnis:

Falsch. Z.B. ist $F(x) = -\cos x$ die Stammfunktion von $f(x) = \sin x$, aber es gilt $f'(x) = \cos x \neq F(x)$.

(d) Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

Ergebnis:

Richtig. Bei der Ableitung der Stammfunktionen fällt der konstante Summand weg.

4.3.4 Integrationsregeln

(97) Geben Sie je zwei Stammfunktionen zu den nachfolgenden Funktionen an.

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

(b) $f(x) = x^k$, $(k \in \mathbb{N})$

(a) Ergebnis:

$$F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x$$

$$F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c \text{ mit einer beliebigen Konstanten } c \in \mathbb{R}$$

(b) Ergebnis:

$$F_1(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + c \text{ mit einer beliebigen Konstanten } c \in \mathbb{R}$$

4.3.5 Bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen

(98) Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^2 \left(x^3 - 2x + 4\right) dx$

(b) $\int_{-1}^2 x^k \, dx$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Ergebnis:

$$I = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 4x\right]_0^2 = 8$$

(b) Ergebnis:

$$I = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^2 = \frac{2^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{k+1}$$

5 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Eine zentrale Aufgabe der linearen Algebra ist es, lineare Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Größen zu betrachten und diese aufzulösen. Diese Zusammenhänge können in einem Koordinatensystem veranschaulicht werden. Damit können Lösungsmengen, die diese Zusammenhänge erfüllen, sowohl rechnerisch als auch geometrisch ermittelt werden. Studienanfänger*innen aller Studienbereiche besitzen folgende Kompetenzen:

- eine analytisch gegebene Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zeichnen (Kapitel 5.1, Aufgaben 99, 100)
- zweidimensionale lineare Gleichungssysteme lösen und Ergebnisse geometrisch interpretieren (Kapitel. 5.2, Aufgaben 102, 103)

Darüber hinaus wird von Studienanfänger*innen der Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften die Kompetenz erwartet, Koordinatenbereiche in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zu skizzieren (Kapitel 5.1, Aufgabe 101).

5.1 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

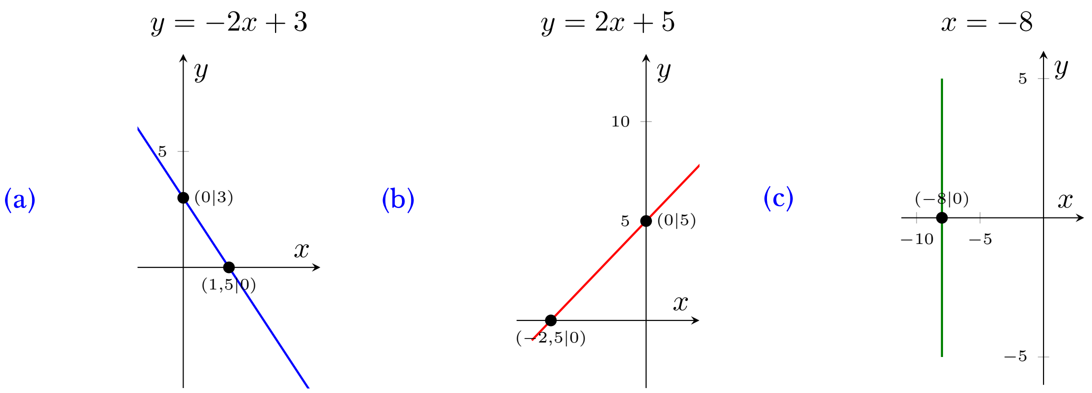
5.1.1 Eine analytisch gegebene Gerade zeichnen

(99) Zeichnen Sie die Lösungsmengen:[34]

(a) $y = -2x + 3$
(b) $-2x + y - 5 = 0$
(c) $x + 8 = 0$

Sie können eine Wertetabelle anlegen oder die Schnittpunkte mit den Achsen bestimmen.

Ergebnis:



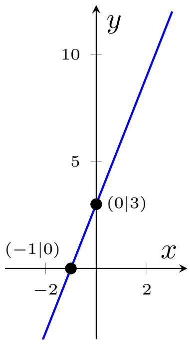
(100) Zeichnen Sie:[35]

(a) die Gerade mit Steigung 3 durch den Punkt $P(0|3)$
(b) die Gerade mit Steigung -2 durch den Punkt $P(2|3)$
(c) die Gerade durch die Punkte $P_1(-4|-3)$ und $P_2(1|3)$

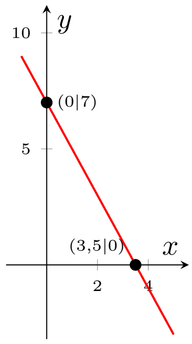
Die Gerade ist hier jeweils über 2 Merkmale (zwei Punkte oder die Steigung und einen Punkt) definiert. Nutzen Sie diese beiden Merkmale zur Zeichnung des Graphen.

Ergebnis:

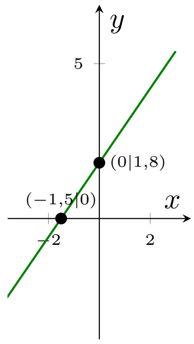
(a) $y = 3x + 3$



(b) $y = -2x + 7$



(c) $y = \frac{6}{5}x + \frac{9}{5}$



5.1.2 Koordinatenbereiche skizzieren

(101) Schraffieren Sie in einem Koordinatensystem für x zwischen 0 und 6 das Gebiet, in dem $y \leq x$ und $y \geq 0$ ist.

Zeichnen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die gegebenen Bedingungen ein und markieren Sie die eingeschlossene Fläche.

Ergebnis:

Abbildung 1

5.2 Lineare Gleichungssysteme

5.2.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen

(102) Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 24 \\ 12 - 4y &= 5x \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 12, \quad y = -12$

(b)

$$\begin{aligned} x + 2y - 5 &= 0 \\ 4y + 2x &= 10 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x = 5 - 2y, \quad y = y$

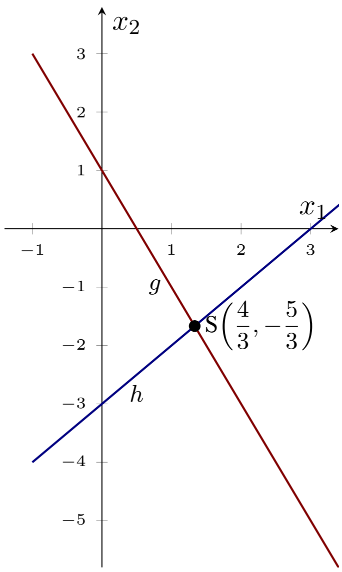
5.2.2 Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren*

(103) Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in der x_1x_2-Ebene:

$$\begin{aligned} g &: 2x_1 + x_2 = 1 \\ h &: \ \ x_1 - x_2 = 3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung.[36]

Lösen Sie die Geradengleichungen nach x_2 auf, um die Geraden zeichnen zu können.



Für die Berechnung des Schnittpunktes S bietet sich hier das Additionsverfahren an.

Ergebnis:

Der Schnittpunkt S der Geraden liegt bei $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

6 Stochastik

Stochastik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Beschreibung und Berechnung von zufälligen Ereignissen und Prozessen befasst. In der Regel werden Stochastik-Kenntnisse in den Studiengängen der hessischen Hochschulen für Angewandte Wissenschaften vermittelt, jedoch werden von Studienanfänger*innen der Wirtschaftswissenschaften folgende grundlegende Kompetenzen erwartet:

- Lage- und Streumaße erhobener Daten ermitteln, Daten in Diagrammen darstellen und Diagramme interpretieren (Kapitel 6.1, Aufgaben 104 - 107)
- Wahrscheinlichkeiten sowie absolute und relative Häufigkeiten von Zufallsereignissen bestimmen sowie Wertebereiche von Zufallsvariablen angeben (Kapitel 6.2, Aufgaben 108 - 112)
- Häufigkeitsverteilungen mehrerer Merkmale bei mehrstufigen Zufallsexperimenten passend darstellen (Kapitel 6.2, Aufgabe 113, 114)
- Terme mit Summen- und Produktzeichen verstehen und anwenden (Kapitel 6.1, Aufgabe 106, Kapitel 6.3, Aufgabe 18)
- Merkmale und Merkmalsausprägungen in erhobenen Daten identifizieren (Kapitel 6.4, Aufgaben 115, 116)

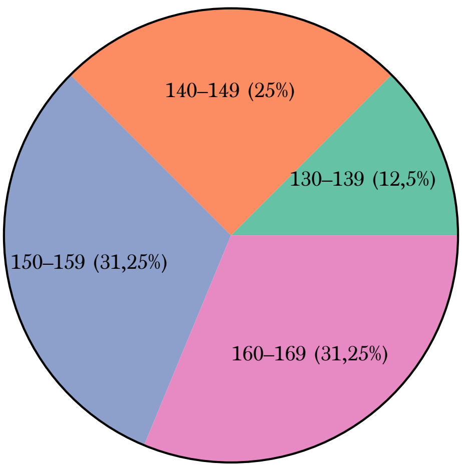
6.1 Statistische Erhebung und Auswertung

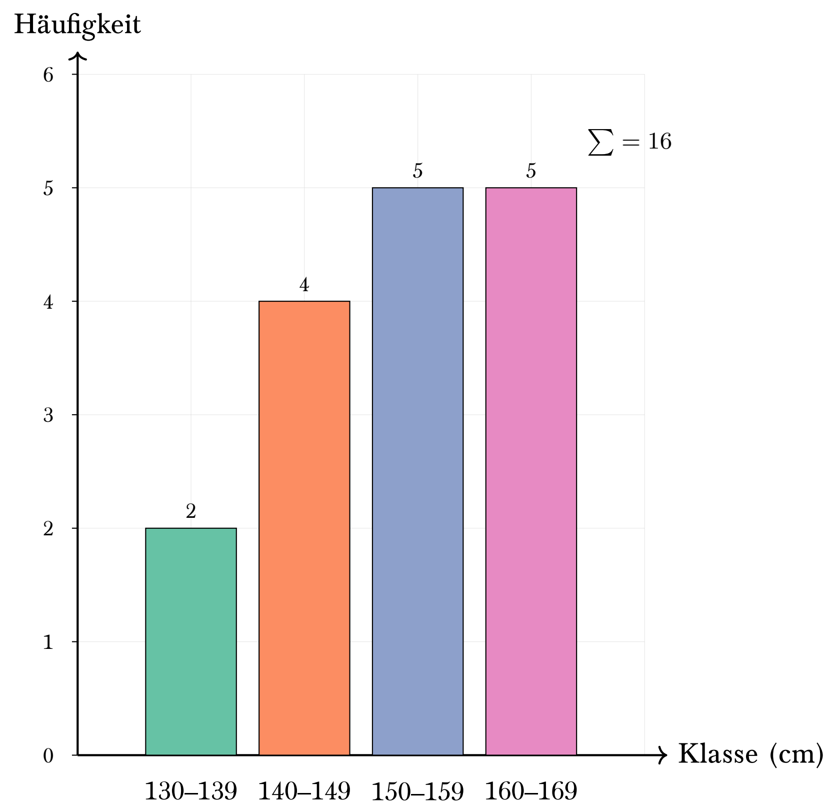
6.1.1 Darstellung von Daten

(104) Die Körpergrößen aller Schüler*innen einer Schulklasse werden gemessen.
Die gemessenen Körpergrößen in cm sind:
138; 143; 154; 158; 163; 146; 165; 161; 139; 167; 152; 155; 148; 160; 159; 142.
Teilen Sie die Messdaten in die Kategorien ›$130 - 139\,cm$‹, ›$140 - 149\,cm$‹, ›$150 - 159\,cm$‹ und ›$160 - 169\,cm$‹ ein und erstellen Sie sowohl ein Säulen- als auch ein Kreisdiagramm.

Zählen Sie die Anzahl der Personen pro Größenkategorie.

Ergebnis:





6.1.2 Lage- und Streumaße bestimmen

(105) Die Besucher*innen eines Theaterstücks werden nach ihrem Alter gefragt. Die erhaltenen Antworten sind: 62; 80; 88; 16; 51; 49; 46; 84; 51; 84; 21; 51; 64; 18; 25; 37; 73; 74 Jahre.

(a) Ermitteln Sie die Werte der nebenstehenden Tabelle.

(b) Verwenden Sie die ermittelten Werte, um einen Boxplot zu zeichnen.

Kenngröße	Wert
Arithmetischer Mittelwert	
Minimum	
Maximum	
1.Quartil***	
Median (2.Quartil)	
3.Quartil***	
Spannweite	
Modalwert***	

(a)

Arithmetischer Mittelwert: Wird umgangssprachlich auch als Durchschnitt bezeichnet.

Minimum: Der kleinste Wert der Liste. Maximum: Der größte Wert der Liste.

1.Quartil: Der kleinste Wert der Datenreihe, für den gilt: Mindestens 25 % der Daten liegen darunter.

Median/2.Quartil: Der kleinste Wert der Datenreihe, für den gilt: Mindestens 50 % der Daten liegen darunter.

3.Quartil: Der kleinste Wert der Datenreihe, für den gilt: Mindestens 75 % der Daten liegen darunter.

Spannweite: Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Messwert.

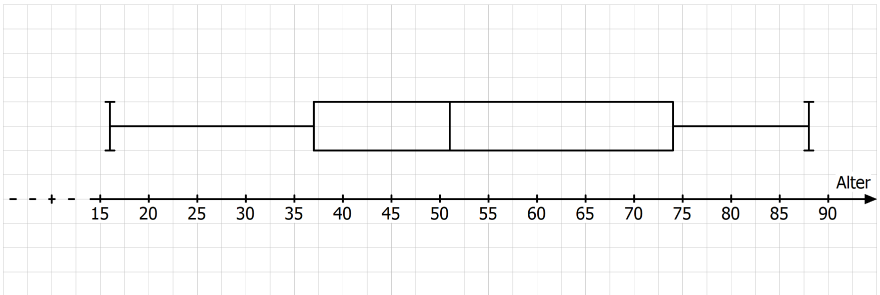
Modalwert: Der Wert, der am häufigsten vorkommt.

Ergebnis:

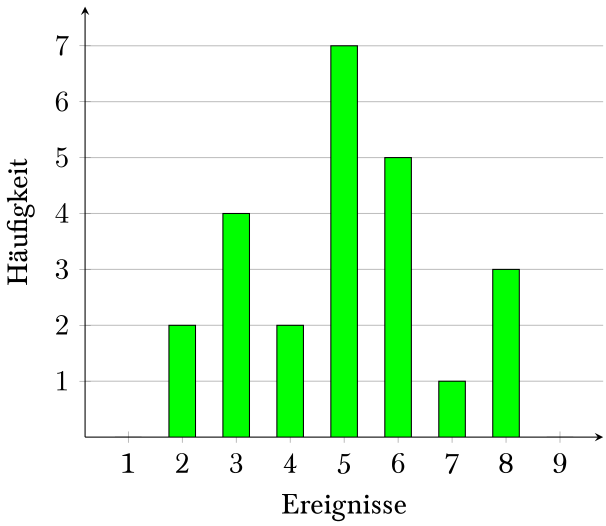
Kenngröße	Wert
Arithmetischer Mittelwert	$54,\overline{1}$
Minimum	16
Maximum	88
1.Quartil	37
Median (2.Quartil)	51
3.Quartil	74
Spannweite	72
Modalwert	51

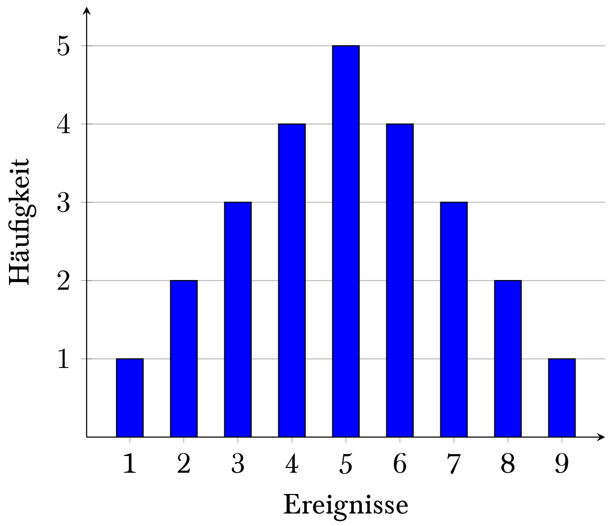
(b) Zeichnen Sie zunächst eine Linie, auf der das Alter aufgetragen wird. Markieren Sie dann das Minimum und Maximum als Grenzen des Plots. Die „Box" zeichnen Sie vom ersten bis zum dritten Quartil und in der Box wird noch der Median markiert.

Ergebnis:



(106) Bestimmen Sie zu den beiden dargestellten Verteilungen arithmetisches Mittel, Median, Standardabweichung und Varianz.





Es kann hilfreich sein, die Daten aus den Graphen als Zahlenfolgen der Größe nach geordnet aufzuschreiben.

Ergebnis:
Arithmetischer Mittelwert: 5 und 5
Median: 5 und 5
Standardabweichung: 1,732 und 2
Varianz: 3 und 4

6.1.3 Unterschied zwischen Prozentsatz und Prozentpunkten**

(107) Laut Kraftfahrtbundesamt wurden im Jahr 2020 2.917.678 Personenkraftwagen neu zugelassen. Davon waren 194.163 Elektro-PKW (Battery Electric Vehicles).
Im Jahr 2021 wurden 2.622.132 Personenkraftwagen neu zugelassen. Davon waren 355.961 Elektro-PKW.

(a) Berechnen Sie jeweils den Prozentsatz der in den Jahren 2020 und 2021 in Deutschland neu zugelassenen Elektro-PKW.

(b) Um welchen Prozentsatz (bezogen auf das Jahr 2020) stieg der Anteil der neu zugelassenen Elektro-PKW im Jahr 2021?

(c) Um welchen Prozentsatz (bezogen auf das Jahr 2020) stieg die absolute Anzahl der neu zugelassenen Elektro-PKW im Jahr 2021?

(d) Um wie viele Prozentpunkte stieg der Anteil der Elektro-PKW an den insgesamt zugelassenen PKW?

Definitionen:

- Prozentsatz [%] = $\dfrac{Teilmenge}{Gesamtzahl} \cdot 100$
- Wachstum [%] = $\dfrac{Prozentsatz_{neu} - Prozentsatz_{alt}}{Prozentsatz_{alt}} \cdot 100$
- Prozentpunkt = absoluter Unterschied zwischen zwei Prozentsätzen ohne Bezug zum Ausgangswert

Ergebnis:
(a) Für 2020 $\approx 6{,}65\%$; für 2021 $\approx 13{,}58\%$

(b) Wachstum in $\% \approx 104{,}21\%$

(c) Wachstum in $\% \approx 83{,}33\%$

(d) $13{,}58\% - 6{,}66\% = 6{,}93$ Prozentpunkte

6.2 Umgang mit dem Zufall*

6.2.1 Zufallserscheinungen im Alltag

(108) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bei einem Wurf zweier Laplace-Würfel.

E_1: Es wird ein Pasch (zweimal die gleiche Augenzahl) gewürfelt.

E_2: Es wird genau eine 6 gewürfelt.

E_3: Die Summe der gewürfelten Augenzahlen beträgt 9.

(a) Da es egal ist, mit welcher Augenzahl der Pasch gewürfelt wird, gibt es sechs Möglichkeiten einen Pasch zu würfeln.

Ergebnis:

$$P(E_1) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

(b) Sie können entweder zuerst eine '6' und danach eine andere Zahl würfeln oder zunächst eine '1' bis '5' und dann eine '6'.

Ergebnis:

$$P(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

(c) Überlegen Sie, wie viele Kombinationen in der Summe eine 9 ergeben und wie viele Zahlenpaare beim Würfelwurf insgesamt existieren.

Ergebnis:

$$P(E_3) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

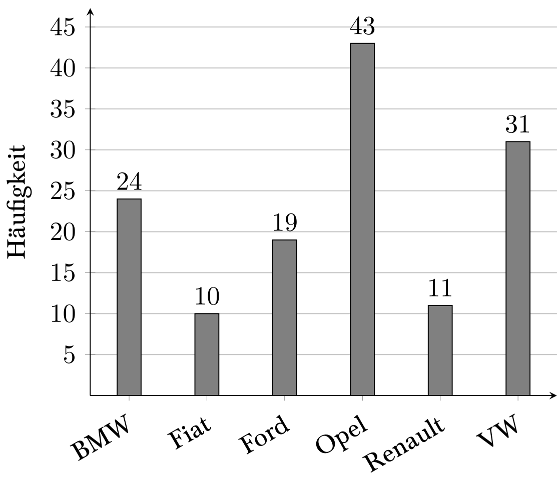
6.2.2 Absolute und relative Häufigkeit

(109) Auf dem Parkplatz einer Hochschule werden Automarken gezählt. Das Diagramm führt alle Marken auf, von denen mindestens 10 Fahrzeuge vor Ort waren.

(a) Geben Sie die relative Häufigkeit jeder Automarke an.

(b) Eine zufällig ausgewählte Person, die mit dem Auto zum Campus fährt, ist auf dem Weg zu ihrem Wagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört ihr Auto zu einer deutschen Marke (BMW, Opel, VW)?

(c) In einer Stadt sind rund 164.000 PKW zugelassen. Schätzen Sie, ausgehend von der vorliegenden Stichprobe, wie viele Fahrzeuge der Marke Opel voraussichtlich dabei sind.



(a) Die relative Häufigkeit gibt den Anteil am Ganzen an (diese Angabe ist auch in Prozent möglich).

Ergebnis:

Ford$= \dfrac{19}{138} = 13{,}77\%$

(b) Wie viel Prozent der Fahrzeuge auf dem Parkplatz gehören zu einer der Marken BMW, Opel oder VW?

Ergebnis:

$$p = \frac{(24 + 43 + 31)}{138} = 71{,}01\%$$

(c) Bestimmen Sie den Anteil der Opel-Fahrzeuge auf dem Parkplatz der Hochschule. Berechnen Sie mit dem ermittelten Anteil anschließend die geschätzte Anzahl an Opel-Fahrzeugen in der ganzen Stadt.

Ergebnis:

Anteil auf dem Parkplatz $= \dfrac{43}{138} = 31{,}16\%$,

Anzahl in der Stadt $= 165\,000 \cdot 31{,}16\% = 51\,414$

6.2.3 Relative Summenhäufigkeiten bestimmen***

(110) Bei einem Halbmarathonlauf (Männerwertung) wurden die in unten stehender Tabelle genannten Zeiten von der jeweiligen Anzahl von Finishern erreicht.

Zeit [h]	<1:10	$\geq$ 1:10 < 1:20	$\geq$ 1:20 < 1:30	$\geq$ 1:30 < 1:40	$\geq$ 1:40 < 1:50	$\geq$ 1:50 < 2:00	$\geq$ 2:00 < 2:10	$\geq$ 2:10 < 2:20	$\geq$ 2:20
Anzahl	18	80	135	303	418	461	246	134	112

(a) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten der Finisher in den einzelnen Zeit-Bereichen.

(b) Bestimmen Sie die relativen Summenhäufigkeiten der Finisher für die einzelnen Zeit-Obergrenzen.

(c) Ein Teilnehmer wird in einem Interview nach seiner erreichten Zeit gefragt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichte er das Ziel unter $1{:}30\,h$?

Definitionen:

- Gesamtzahl = Summe aller Finisher
- Relative Häufigkeit = $\frac{Klassenhäufigkeit}{Gesamt}$
- Summenhäufigkeit = Kumulierte relative Häufigkeit bis zur jeweiligen Grenze

Ergebnis:

(a)

Klasse (Zeit in h)	**Anzahl**	**Relative Häufigkeit**
< 1:10	18	0,0094
1:10 – <1:20	80	0,0419
1:20 – <1:30	135	0,0708
1:30 – <1:40	303	0,1588
1:40 – <1:50	418	0,2192
1:50 – <2:00	461	0,2417
2:00 – <2:10	246	0,1290
2:10 – <2:20	134	0,0703
2:20 – <2:30	112	0,0587
Gesamt	1907	1,0000

(b)

Klasse (Zeit in h)	**Anzahl**	**Summenhäufigkeit**
< 1:10	18	0,0094
< 1:20	98	0,0513
< 1:30	233	0,1222
< 1:40	536	0,2810
< 1:50	954	0,5002
< 2:00	1415	0,7419
< 2:10	1661	0,8709
< 2:20	1795	0,9412
$\geq$ 2:20	1907	1,0000

(c)

$$P(\text{Zeit} < 1{,}5\,\text{h}) = \frac{18 + 80 + 135}{1907} = \frac{233}{1907} \approx 0{,}1222 = 12{,}22\,\%$$

Der Wert lässt sich auch direkt in der Tabelle aus Teil (b) ablesen.

6.2.4 Wertebereiche von Zufallsvariablen

(111) In einer Urne befinden sich blaue und rote Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die Farbe der gezogenen Kugel. Welchen Wertebereich umfasst die Variable X?

Die Zufallsvariable X kann nur die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments annehmen, also die Farben der Kugeln, da diese das Ergebnis der Ziehung bestimmen.

Ergebnis: $W_X = \{\text{rot}, \text{blau}\}$

(112) In einer Urne befinden sich n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind. Aus der Urne werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt die maximale Nummer einer gezogenen Kugel. Welchen Wertebereich umfasst die Variable X?

Die kleinst mögliche maximale Nummer ist k, wenn die ersten k Kugeln gezogen werden. Die größt mögliche maximale Nummer ist n, wenn die größte Kugel gezogen wird.

Ergebnis: $W_X = \{k, k+1, \ldots, n\}$

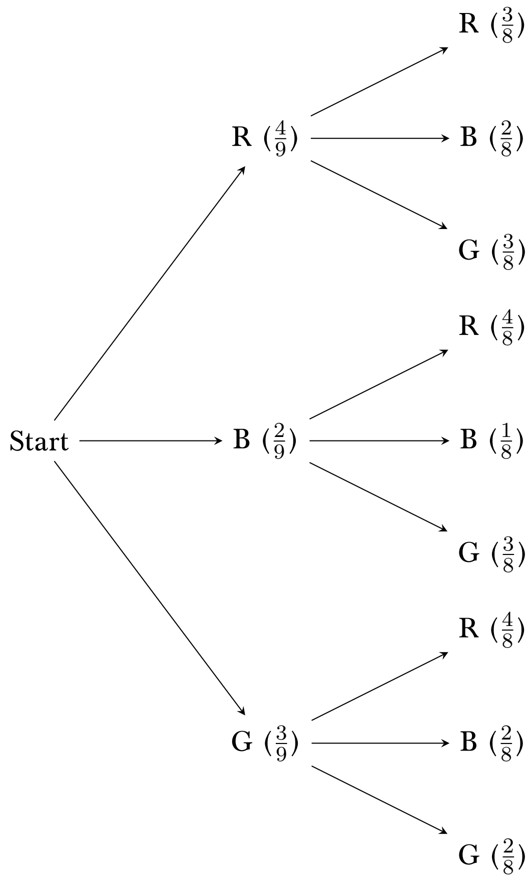
6.2.5 Mehrstufige Zufallsexperimente

(113) In einer Urne befinden sich 9 gleichartige Kugeln, davon sind 4 rot, 2 blau und 3 grün. Es werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches alle möglichen Ereignisse erfasst.

Jede erste Kugel kann rot, blau oder grün sein. Danach reduziert sich die Anzahl der Kugeln und auch die jeweilige Farbe. Die erste Stufe des Baumes hat drei Äste (rot, blau, grün). Die zweite Stufe hängt davon ab, was zuerst gezogen wurde (z.B. wenn rot gezogen wurde, sind noch 3 rote übrig usw.). Insgesamt gibt es 9 Pfade mit angepassten Wahrscheinlichkeiten.

Ergebnis:



(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

E_1: Die erste Kugel ist rot, die zweite Kugel ist blau.

E_2: Mindestens eine Kugel ist grün.

E1:

$P(E1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$

Ergebnis: $P(E1) = \frac{1}{9}$

E2:

Verwenden Sie die Gegenwahrscheinlichkeit:

$P(\text{keine grüne}) = P(RR) + P(RB) + P(BR) + P(BB)$

$P(\text{keine grüne}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{12+8+8+2}{72} = \frac{30}{72}$

$P(E2) = 1 - \frac{30}{72} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$

Ergebnis: $P(\text{mind. eine grüne}) = \frac{7}{12}$

(114) In einem Gartenbaubetrieb werden 1200 von 1800 Pflanzen mit einem biologischen Pflanzenschutzmittel behandelt. Nach einer bestimmten Zeit wird jede Pflanze auf Schädlingsbefall untersucht. Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Das Ereignis A ist „Pflanze ist behandelt“ und das Ereignis B „Pflanze hat Schädlinge“.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

E_1: Eine Pflanze ist behandelt.

E_2: Eine Pflanze ist nicht behandelt und hat Schädlinge.

E_3: Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie nicht behandelt ist, hat Schädlinge.

E_4: Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie keine Schädlinge hat, ist behandelt.

Gruppe	B	nicht B	Summe
A	120	1080	1200
nicht A	240	360	600
Summe	360	1440	1800

Suchen Sie die zugehörigen Zahlen und geben Sie sie als Anteil von der jeweiligen Gruppe an.

Ergebnis:

$P(E_1) = \frac{1200}{1800} = \frac{2}{3} = 66,\bar{6}\%$

$P(E_2) = \frac{240}{1800} = \frac{2}{15} = 13,\bar{3}\%$

$P(E_3) = \frac{240}{600} = \frac{2}{5} = 40\%$

$P(E_4) = \frac{1080}{1440} = \frac{3}{4} = 75\%$

6.3 Terme mit Summen-/Produktzeichen lesen bzw. schreiben

Siehe Aufgabe 18

6.4 Merkmale und Merkmalsausprägungen***

6.4.1 Merkmalstypen

(115) Im Rahmen eines fünftägigen internationalen Jongleur*innentreffens führt die veranstaltende Organisation eine Befragung der Teilnehmer*innen durch. Erhoben werden folgende Merkmale:

- Nationalität
- genutzte Jonglierrequisiten (z. B. Bälle, Keulen, Ringe, Devilsticks, Diabolo, Cigar Boxes etc.)
- eigene Einschätzung der Jonglierfähigkeiten (Ausprägungen: Anfänger*in, Fortgeschrittene*r, Profi)
- Anfahrtsstrecke
- Anzahl der Tage, an denen das Treffen besucht wird

(a) Klassifizieren Sie, welche der oben genannten qualitative und welche quantitative Merkmale sind.

Ergebnis:

- Nationalität: qualitativ
- Jonglierrequisiten: qualitativ
- Einschätzung der Fähigkeiten: qualitativ
- Anfahrtsstrecke: quantitativ
- Anzahl Besuchstage: quantitativ

(b) Beschreiben Sie bei qualitativen Merkmalen darüber hinaus, ob die zugehörige Skala eine nominale oder ordinale ist.

Ergebnis:

- Nationalität: nominal
- Jonglierrequisiten: nominal (mehrere Ausprägungen möglich)
- Einschätzung der Fähigkeiten: ordinal (es besteht eine Rangordnung)

(c) Geben Sie bei quantitativen Merkmalen an, ob sie anhand einer diskreten oder kontinuierlichen Skala beschrieben werden.

Ergebnis:

- Anfahrtsstrecke: kontinuierlich
- Anzahl Besuchstage: diskret

6.4.2 Merkmalsausprägungen

(116) Das Hessische Statistische Landesamt möchte eine Befragung der Milchviehbetriebe im Land Hessen durchführen. Dazu sollen folgende Merkmale der Betriebe erfasst werden:

- Standort des Betriebes
- Bewirtschaftete Fläche [ha]
- Bestand an Milchvieh
- jährliche Milchproduktion
- Abnehmer der produzierten Milch

Beschreiben Sie zu jedem Merkmal, welche Ausprägungen es annehmen kann.
Hinweise:

- Standort des Betriebes: z.B. „Kassel“, „Gießen“, „Fulda“, etc. (qualitativ, nominal)
- Bewirtschaftete Fläche: z.B. 15 ha, 32,5 ha, 100 ha (quantitativ, kontinuierlich)
- Bestand an Milchvieh: z.B. 40 Kühe, 150 Kühe (quantitativ, diskret)
- Jährliche Milchproduktion: z.B. 300.000 l, 1.200.000 l (quantitativ, kontinuierlich)
- Abnehmer der Milch: z.B. „Molkerei A“, „Privatkunden“, „Genossenschaft XY“ (qualitativ, nominal)

Ergebnis:
Ausprägungen sind je nach Merkmal diskrete Zahlen, kontinuierliche Größen oder Kategorien.

Literatur

[cosh] COSH-GRUPPE: *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 3.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WI MINT-Fächern.* November 2021. `https://cosh-mathe.de/wp-content/uploads/2021/12/makV3.0.pdf`; letzter Aufruf 13.3.2023

Übersicht der entnommenen Aufgaben aus [cosh]

[1]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 1 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
[2]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 2 des cosh-Katalogs.
[3]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 4 des cosh-Katalogs.
[4]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 49 des cosh-Katalogs.
[5]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 18 des cosh-Katalogs.
[6]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 8 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
[7]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 13 des cosh-Katalogs.
[8]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 14 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[9]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 9 des cosh-Katalogs.
[10]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 15 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[11]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 16 des cosh-Katalogs.
[12]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 20 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[13]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 21 a) des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
[14]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 21 b) des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
[15]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 29 des cosh-Katalogs.
[16]Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 31 des cosh-Katalogs.
[17]Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 28 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[18]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 33 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[19]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 34 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[20]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 35 des cosh-Katalogs.
[21]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 26 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[22]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 40 des cosh-Katalogs.
[23]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 44 des cosh-Katalogs.
[24]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 48 des cosh-Katalogs.
[25]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 50 des cosh-Katalogs.
[26]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 55 (c) des cosh-Katalogs.
[27]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 57 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[28]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 58 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[29]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 72 des cosh-Katalogs.
[30]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 80 des cosh-Katalogs.
[31]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 81 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[32]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 85 des cosh-Katalogs.
[33]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 82 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[34]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 86 (a)-(c) des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[35]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 86 (d)-(f) des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
[36]Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 92 des cosh-Katalogs.